ELEMENTA
ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ

INSTITUTIONIBUS PHYSICIS

PRÆMITTENDA

AUCTORE

FRANCISCO JACQUIER

EX MINIMORUM FAMILIA

PRIMARIARUM PER EUROPAM ACADEMIARUM SOCIO, IN LYCEO ROMANO, ET IN COLLEGIO URBANO DE PROPAGANDA FIDE PROFESSORE.





ROMÆ MDCCLXXVII.

APUD MARCUM PALEARINIUM

PRÆSIDUM FACULTATE.

Ad usum D. Lodovici Ghelli.



AUCTOR LECTORI.

PHyſicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta eſt neceſſitudo, ut apud omnes cultiores viros tanquam vaniſſimum merito habeatur Phyſices ſtudium, Geometriæ præſidio deſtitutum. Quæ cum ita ſint, nemo mirari debet quod a ſtudioſis adoleſcentibus, ſacræ licet Theologiæ deſtinatis, Arithmeticæ & Geometriæ elementa requiram; ſi enim his careant doctrinæ Phyſicæ adjumentis, ſatius eſt eos huic præclariſſimo ſtudio valedicere omnino: *Melius eſt nihil ſcire quam male ſcire*; tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiæ, genus mentis aciem hebetat rectumque judicium corrumpit, & omni ſtudiorum generi nocet plurimum. At me fortaſſe reprehendent cenſores aliqui quod nova elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius ſit Elementorum libris. Neque talem me eſſe quis ſibi falſo perſuadeat ut de aliis elementis minus laudabiliter ſentiam, huncque meum libellum ſupra alios omnes extollam, quod tamen a pleriſque Elementorum auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis ratione licet & methodo diverſiſſimis ſuam juſtam laudem concedendam eſſe facile quiſque fatebitur, ſi varias attenderit adoleſcen-



ſcentum conditiones atque voluntates. Alii ſublimiorem Phyſicam Matheſimque univerſam addiſcere, & funditus haurire ſibi proponunt; alii autem aliis ſtudiis gravioribuſque negotiis nati Inſtitutiones Geometricas ſtrictim leviterque tantum arripiunt quantum ſcilicet expoliendo perficiendoque ingenio ſatis eſt. Alii ultra Geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili geometriæ parte contenti ſunt; alii tandem alios fines aliaque conſilia in animo habent. Quid ergo mirum quod ego Arithmeticæ & Geometriæ Elementa ad meas phyſicas inſtitutiones accomodatiſſima proponam? At quæcumque ſit Elementorum ratio, demonſtrationis ſeveritas religioſe ſemper tenenda eſt, neque obſcura multarum propoſitionum farragine juvenum mens eſt obruenda, ſed ſplendidiori accuratioris Geometriæ lumine illuſtranda. Monendi ergo ſunt ſtudioſi adoleſcentes ut ab iis caute abſtineant Elementis, quæ nec ſatis accurata methodo conſcripta ſunt, nec firmiſſimo demonſtrationum robore munita. Pernicioſiſſima quidem ſunt ſtudioſæ juventuti talia Elementa quæ eos habent auctores, quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verum ſi recto proportionum ordine nexuque neceſſario colligatæ fuerint demonſtratio-

tio-

tiones omnes, ex hoc ſtudio diligenter &, ut par eſt inſtituto, in quolibet ſcientiarum genere fructum maximum ſine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam exiſtimationis Geometrico ſtudio detrahi debet, ſi aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam verſatiſſimi, in vulgari tamen agendi ratione & in rebus familiariſſimis omnino inepti. Id quidem, quod ſumma injuria objici ſolet, tribuendum eſt præcipiti quorundam Geometrarum judicio; non deſunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, neceſſaria rerum tractandarum vel gerendarum principia & elementa non ſatis tenent, atque hinc mirum non eſt quod aliquando errent graviter, Geometrarum non Geometriæ vitio. Et requidem ipſa, ſi fons erroris probe attendatur, vitium in principio, non vero in *conſequentiis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci, veris utuntur principiis, errant autem in *conſequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur Geometrici ſtudii pretium; ſi nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *cæteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem ſit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem deſtitutus, facile mihi perſuadeo virum Geometram in quo-

quolibet ſcribendi genere, in tractanda etiam quæſtione theologica multo excellentiorem futurum; neque enim quæ prima ſunt, poſtrema dicet, & viciſſim; nec quæ perſpicua ſunt & illuſtria, minus accurata methodo obſcurabit, aut quæ abſtruſa ſunt & involuta denſiori caligine non obvolvet. Verum ne Geometriæ ſtudio nimis tribuere videar & hanc, quam maxime amo diſciplinam, magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris in quibus excellens judicium meditatione & experientia ſubactum atque perfectum miramur, ſive graviora tractanda ſint negotia, ſive ſtudiis quibuſcumque danda ſit opera. Has juſtiſſimas Geometriæ laudes attigiſſe ſatis ſit ad excitandam adoleſcentum voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus phyſicis tantum, ſed etiam ut in ſtudiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque amplificent, hujus tamen ſanctiſſimi dogmatis probe memores: *Captivare intellectum in obſequium fidei.*

Cæterum Scholia & appendices in his Elementis prætermitti poſſunt ab iis qui majori pollent intelligendi facilitate; minus enim neceſſaria ſunt hæc additamenta.

INDEX

INDEX

CAP. III.



REIMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sac. Palatii Apostolici.

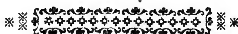
F. A. Marcucci Episc. Montis-Alti Vicesg.

REIMPRIMATUR,

Fr. Th. Aug. Ricchinius Ord. Prædicat. Sac. Palatii Apost. Magister.

ELE-

ELEMENTA
ARITHMETICÆ
TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.



CAPUT I.

De præcipuis utriusque Arithmeticæ operationibus generatim consideratis.

I



Rithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde & determinatos 1, 2, 3 &c., vel per alphabeti litteras a, b, c &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *Arithmetica* simpliciter dicitur; altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*; convenientius a Newtono Arithmetica *universalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis atque accurata explicatio. Ita in præsenti casu, explicatis Arithmeticæ & Algebræ operationibus, recte jam dicere liceret: Hæc quam vobis explicavimus scientia, ea est, quæ *Arithmetica* vel *Algebra* vocatur. Per *numerum* arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*. At accuratius a Newtono definitur numerus, *relatio* seu *ratio* quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem; quæ quidem definitio ut in bono lumine collocetur, observandum

eſt quantitatem quamlibet cum alia ejuſdem generis quantitate comparatam, vel ea minorem eſſe, vel majorem, vel tandem ipſi æqualem, hoc eſt, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem quæ pro unitate aſſumitur, & in majori ter continetur. Contra autem ſi quantitas major 3, pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis majoris, quæ tanquam unitas conſideratur, ſive 1 ter in quantitate majori continetur. Inde autem intelligitur quid ſit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur quem unitas metitur; fractus qui eſt pars unitatis; ita 1, 2, 3 &c. ſunt numeri integri; ſed dimidia, tertia, quarta, &c. pars unitatis ſunt numeri fracti, ita autem exprimi ſolent numeri fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c. Ratio quam modo definivimus, ſi nempe conſideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, ſi exceſſum tantummodo quantitatis unius ſupra aliam conſideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica* pro diverſa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad ſecundam eſſe dicitur ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis ſive characteribus deſignantur; ſunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 quorum ultimus *cyphra* ſive *zero* appellatur. Harum notarum varia eſt ſignificatio non ſolum ex diverſa illarum figura, ſed etiam ex diverſo quem occupant loco. Quæ ad ſiniſtram poſtremæ occurrunt deſignant unitates, quæ proxime præcedunt unitatum decadas; exinde centenarii ſequuntur, millenarii & ſic deinceps per decades & centenarios progrediendo. Huic autem uſui potiſſimum

mum cyphra destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero removens; sic unitatis nota, quæ sola unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in secundum aut tertium locum rejecta, denas unitates aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur; ita 247, exprimunt ducentas quadraginta septem unitates; at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio, ita si legere oporteat numerum S. 3, 234 | 057, 906 | 234, 402. D: illum divide, quantum fieri potest, in classes, quarum singulæ tres notas contineant, incipiendo a dextra D, & progrediendo versus sinistram S; quamlibet classem divide per virgulam singulis ternis notis interjectam. Deinde post duas primas classes, seu post sextam notam duc superius longiorem lineam verticalem A, quæ sex notas sejungat; & rursus progrediendo versus sinistram S, linea verticali B, dividantur aliæ sex notæ, & ita porro quantum opus est. Manifestum est ex dictis, in prima classe 402, contineri unitates duas, nihil decadum, & centenaria quatuor; quare classis ista legitur quadringenta duo: in 2.ª classe 234, continentur quatuor unitates, tres decades, & duo centenaria millium, hoc est, ducenta triginta quatuor millia. Quapropter in separatione sex primarum notarum ab A ad D, continentur tantum unitates usque ad centena millia inclusive & tota illa separatio legenda est in hunc modum. A. 234402. D; ducenta triginta quatuor millia quadringenta duo. Tertia classis 906 pertinet ad milliones & legenda est sic: nongenti sex milliones. Nam cum in secundo hujus classis loco reperiatur *o*, indicium est nullam esse in hac classe decadem millionum. Quarta classis B. 057, continet septem & quinquaginta millia millionum; cum enim in tertio

loco reperiatur *o*, nihil est centenariorum millium millionum; & ideo classis ista quarta legitur 057, quinquaginta septem millia millionum, ac totus numerus 57, 906, 234, 402 legetur: quinquaginta septem millia nongenti sex milliones, ducenta triginta quatuor millia, quadringenta duo.

III. Vulgares explicavimus arithmeticæ characteres, quorum auctores feruntur astronomi Arabes; aliquid jam dicendum est de notis quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ, quarum in physicis institutionibus usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ quæ numeros Romanos componunt sunt septem sequentes I, V, X, L, C, D, M. Harum notarum hæc est significatio, I unitas, V quinque, X decem, L quinquaginta, C centum, D quingenta, M mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, æquivalent binario; si tria scribantur, significant ternarium. Numerus quaternarius ita exprimitur, IV. & numerus novenarius hoc modo IX. nempe unitas numeris V, X præfixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6, 7, 8 scribi solet VI, VII, VIII. Si numero L, vel C, præmittatur X, numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, & XC 90; contra autem si numerum L sequatur X, in hunc modum LX, numerus præcedens augetur decade significans 60 &c. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD, sed raro. Præter litteram D, quæ exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IƆ. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIƆ. Eodem modo exprimi potest 600 per IƆC; & 700 per IƆCC &c. Si litteræ C & Ɔ, ante & post addantur, numerus CIƆ augetur in ratione decupla; ita CCIƆƆ significant 10000, CCCIƆƆƆ, 100000 &c. Hi erant communes arithmeticæ characteres apud vete-

veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant, adscripta numeris millenario minoribus lineola hoc modo. $\overline{V}$ significat 5000, $\overline{LX}$ designat 60000. Similiter $\overline{M}$ æquivalet 1000000. $\overline{MM}$ designat 2000000; a recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt adhibitæ, ita litteris IIX designat 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres Romani nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticam, quam quidem invenire problema est haud difficile variisque solvi posset modis; quænam vero fuerit apud Romanos usitata, ignotum est omnino.

IV. Quoniam numeri nihil aliud sunt quam rationes quædam mente perceptæ & certis signis distinctæ, evidens est arithmeticam sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diversæ numerorum combinationes huc revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus, vel modus quo se invicem continent examinetur & assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares arithmeticæ operationes: *Additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, *divisio*.

V. Additio vocatur illa arithmeticæ operatio qua plures numeri simul colliguntur; subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 & 3 ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a majori 3 subtrahatur ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio. Patet in additione & subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summæ ab alterutro numero innotescit, in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur. Multiplicatio appellatur illa arithmeticæ operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries ad-

ditur; ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quater adjungatur, prodibitque 12. Divisio est arithmeticæ operatio in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest. Itaque patet in multiplicatione & divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innotescit numerum 12 ter continere numerum 4; per divisionem autem demonstratur numerum 4 ter contineri in 12. Ex his evidens est multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisio nihil aliud est quam composita subtractio. Quare ad duas duntaxat revocari possunt quatuor vulgares arithmeticæ operationes. Hinc arithmeticæ operationes accurate omnino definivit Newtonus: *Compositionem & resolutionem arithmeticam*, quæ quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri sint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens est additionem & subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam, multiplicationem vero & divisionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes aliæ sunt plurimæ, sed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulas arithmeticæ generatim considerasse satis sit; patet autem hanc quam tradidimus arithmeticæ notionem, arithmeticæ speciosæ communem esse. Itaque licet arithmeticæ nomen generatim usurpemus, illud tamen de arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Jam vero universam arithmeticæ utriusque doctrinam breviter & distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque injuncta brevitas.

CA-

CAPUT II.

De quatuor primis arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I. PRima arithmeticæ operatio dicitur *additio*, quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBL. I.

Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042

ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola & a postrema columna exorsus dic 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum ac præterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, & decadem rejice in sequentem decadum columnam dicens: 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9; 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc est, duas decadas decadum sive duo centenaria & 4 decadas, scribe ergo quatuor in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam rejice, eodemque pacto in hac & reliquis operare, & tandem invenies summam quæsitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur tanquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem rejiciuntur quot decades collectæ sunt; quod quidem faciendum esse evidens est, cum tota qualibet ab unitatum co-

lumna a d reliquas progrediendo, valorem habeat in columna ſequente decuplo majorem quam in præcedente. Igitur in hac operatione adduntur ſingulæ unitates, decades, ſingula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio; quæ quidem evidens eſt; cum totum æquale ſit omnibus partibus ſimul ſumptis, ex notiſſimo principio.

PROBL. II.

Numeros integros ſubtrahere.

II. SEcunda arithmeticæ operatio dicitur *ſubtractio*, cujus totum hoc eſt artificium. Ut numerum datum a dato numero ſubtrahas, numerum ſubtrahendum alteri a quo ſubtrahi debet ita ſubjicies, ut unitates unitatibus reſpondeant, decades decadibus, & ſic de reliquis. Tum ab unitatibus exorſus quamlibet inferiorem notam a ſuperiori ſubtrahe & reſiduum ſcribe infra lineolam, habebis numerum qui ſit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat inferiorem notam ſuperiori majorem eſſe, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a proxime ſequenti nota, quam proinde deinceps habebis tanquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2, auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 ſubduci nequeat, adjice huic denas unitates & auferendo 4 ex 13, reſiduum habebis 9. Tum vero notam ſuperiorem proxime ſequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepiſti ut denis unitatibus præcedentem augeres; habebis ergo reſiduum 1, ideoque reſiduum totum 19652.

Exempl.
23897
4245
19652

Demonſtratio ſatis per ſe conſtat, cum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus &c. Nam quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur uni-

unitatibus & numerus sequens a unitate mulctetur, ratio patet. Hæc nempe unitas in numero 3 decadi unitatum æqualis est, earum scilicet quibus constat idem numerus 3; quare etiamsi unitatem duntaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphræ, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio, ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas, quæ in cyphram sequentem translata decem unitatibus æquivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur atque ita deinceps. Quare patet cyphram ultimam decem unitatibus æqualem esse, cæteras vero antecedentes æquari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio.

Ex additionis & subtractionis natura manifestum est duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre & sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia, patet minorem numerum residuo sive differentiæ additum majori numero æqualem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggregatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur, numerum alterum remanere necessum est. Si igitur explorare velis utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

III. Tertia arithmeticæ operatio vocatur *multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros

meros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis facto. Decadas quæ inter multiplicandum colliguntur sepone, adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 sub 235; tum ducta lineola dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9, cui si addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates; scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1, scribe 7; rursus dic 4 in 5 efficiunt 20, scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat; & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2, habebis 14; scribe igitur 4, & seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1 scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos, eritque 10105 productum quæsitum.

Exempl.

```
  235
   43
 ----
  705
 940
-----
10105
```

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura; si nempe in memoriam revocetur numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus quam in posterioribus; illico enim manifestum fiet toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero per quem fit multiplicatio.

PRO-

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

IV. Quarta arithmeticæ operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæstio, ut inveniatur quoties in numero, dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur, atque totidem unitates scribantur in numero qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina est divisionis notio, nempe dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo divisorem præfige lineola interjecta, tum operationem instituens in primis notis dividendi, quæ exhibeant quantitatem divisori æqualem vel proxime majorem, dic quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2, lineola pariter interjecta ex altera parte dividendi, & factum ex 2 in 43 sive 86 aufer ex 101, & residuo 15 notam appone quæ in dividendo proxime sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150, quotus est 3 quem scribe ut ante, & factum ex 3 in 43 seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215; cum nihil ex ea divisione superfit, patet numerum 235 illum accurate esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Exempl.

```
43 | 10105 | 235
      86
     ----
      150
      129
     ----
      215
      215
     ----
      000
```

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus

tamus in hujusmodi operatione, rem perinde se habere, ac si quæreretur, quota pars quantitatis alicujus singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades &c. singulis dari possint, iisque datis quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam, id quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret, vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris majoribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, & tentamine utendum est; divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum est quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet & divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsenti operatione, quæ est omnium difficillima rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2; statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1,
hoc

hoc eſt dividi debet 10 per 2. Statim autem video 2 in 10 decies non contineri; quare ſcribitur 0 in quoto: tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ 2 ſuus ſervetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero præcedenti 1 apponitur, diviſoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus eſt 208. Hinc generatim intelligitur, qua de cauſa in quoto ſcribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando ſcribi oporteat. Hac diviſione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; ſi autem aliquid reſidui ex poſtrema ſubtractione ſuperſit, quoto adjicienda eſt fractio. Ita ſi in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numerum 417 ex æquo hominibus 2 partiri debeas, ſinguli acciperent nummos 208, & dimidiam partem nummi, quæ ita ſcribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, ſatis eſſe primam dividendi notam per primam diviſoris notam dividi, ſi in diviſore & dividendo idem ſit notarum numerus. Verum ſi dividendus plures contineat notas, perſæpe neceſſe eſt duas primas dividendi notas primæ diviſoris notæ ſubjici; idque fieri debere evidens eſt, quoties datus notarum numerus in diviſore majorem habet valorem, quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo: verum ſi duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam diviſoris notam diviſio ſemper fieri poteſt. Quare generatim oſtenditur, ſumptis in dividendo tot notis quot ſunt in diviſore, notarum numerum in quoto æqualem eſſe reſiduo notarum numero in dividendo. Si vero, quod ſæpe fieri neceſſum eſt, notarum numerus in diviſore unitate minor ſit quam in dividendo, unitate quoque minuatur notarum numerus in quoto. Hinc etiam patet nullum in quoto numerum novenario majorem adhiberi poſſe; alioqui enim notarum numerus in quoto major foret quam oportet; ut jam demonſtratum eſt. Di-

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus, nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura, cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat quoties divisor contineatur in dividendo; si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem; in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur quod in multiplicatione componitur, & contra. Cæterum in multiplicatione & divisione compendia plurima usus docebit; hic monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphræ quot occurrunt in multiplicando & multiplicatore simul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor & dividendus cyphras contineant, in dividendo delendæ sunt tot cyphræ, quot occurrunt in divisore, quæ etiam in ipso divisore deleri debent, & reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est compendium illud valere duntaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris tum dividendi notæ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In præsenti capite sermonem habuimus duntaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diver-

diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At si numerus 3 generatim enuntiaveris, nec rem aliquam designaveris; numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio, & subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species; ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, hexapedæ; sciendum est lineas 12 pollicem unum æquare; pollices 12 pedem unum, & hexapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur quæ 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet: & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio; si quantitas subtrahenda, E. G. linearum numerus, justo major sit; jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione, & subtractione.

Quod multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, assibus 3, in nummos 3, julios 3, asses 3.

asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio ut data quædam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversæ speciei per numerum abstractum multiplicentur facile patet. Si, E. G. productum ex lineis in numerum abstractum majus sit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii, quod autem reliquum est inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest quoties 2 contineatur in 6, quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est, investigare possumus tertiam partem nummorum 6, quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illæ duæ proportiones, licet una eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus semper habetur, concretus autem vel abstractus esse potest numerus divisor. In 1.° casu, quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus & locum habet proportio altera; quæ quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6, *numerus concretus*, dividantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*, quotus erit numerus abstractus 3, hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet quoties divisor contine-

tinetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abſtractus 2 eſt ad unitatem abſtractam 1. Dici autem non poſſet, 6 nummi (*numerus* ſcilicet *dividendus* & *concretus*) ſunt ad quotum 3 (numerum abſtractum), ut nummi 2 (*numerus diviſor* & *concretus*) ad 1 (numerum abſtractum). Talis proportio nullam in mente relinqueret diſtinctam notionem; cum enim numerus concretus & numerus abſtractus diverſi ſint generis, nulla inter eos comparatio & ratio proprie dicta inſtitui poteſt.

Si diviſor ſit numerus abſtractus, ut in caſu ſecundo, quotus eſt numerus concretus, & ſecunda valet proportio. Ita ſi dividantur 6 nummi per numerum abſtractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus ſcilicet concretus), habebiturque hæc proportio: numerus concretus nempe 6 nummi erit ad quotum nummos 2, ut diviſor 3 ad 1. Id vero notandum eſt in utraque proportione unitatem eſſe ſemper numerum abſtractum. Quare diviſio ſub duplici ratione conſiderari poteſt; vel enim quæritur quoties quantitas una in altera ejuſdem generis quantitate continetur, & hic eſt primus caſus; vel quæritur quantitas quæ certis vicibus in alia ejuſdem generis quantitate contineatur, & hic eſt caſus ſecundus. Facile autem patet ex demonſtratis quomodo numeri concreti per abſtractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamſi fuerint diverſæ ſpeciei. Etenim ſi concreti per abſtractos dividantur, initio ſumpto ab iis qui majorem habent valorem, diviſio ex regulis præſcriptis inſtituatur; ſi autem ſuperſit aliquid, ad minorem ſpeciem reducatur. E. G. Si reſidui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum diviſio de more fiat. Si concretos numeros diverſæ ſpeciei per concretos itidem diverſæ ſpeciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi tum diviſoris ad minimam ſpeciem deprimantur; quod per multiplicationem fieri

manifeſtum eſt, atque diviſio fiat eodem modo ac in numeris abſtractis. Cæterum in multiplicatione & diviſione quantitatum diverſæ ſpeciei, varia adhiberi poſſunt operandi compendia, quæ ſine fractionum doctrina intelligi non poſſunt. Diviſionis notionem ex genuinis principiis jam hauſimus; in operationibus arithmeticis abſtrahi ſolet a concretis abſtractiſque numeris, an concreti ſint vel abſtracti, ad majorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam diſtinctam, neceſſe eſt ut numeris ſua deinde reſtituatur conveniens notio.

CAPUT III.

De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica ſpecioſa abſolvendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

I. QUantitatibus litteralibus præfiguntur ſigna, quorum ſignificationem præmitti omnino neceſſum eſt. Signum additionis eſt $+$; ſignum autem ſubtractionis eſt $-$; æqualitas duabus lineolis exprimi ſolet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici ſolet quantitas *poſitiva*; quantitas autem ſubtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur; ita in quantitate litterali $2a$ numerus 2 coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficiens cenſeri debet: ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *ſimiles*, ſi eaſdem contineant litteras, & eumdem earumdem litterarum numerum, etiamſi diverſis coeficientibus notentur; ita $+ 2a$, & $- 5a$ ſunt quantitates ſimiles: at *diſſimiles* ſunt quantitates a & b, atque etiam quantitates a & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis*

minis composita dicitur, quæ plures habet litteras signo +, vel — connexas. Ita a + b constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur; a + b + c ex tribus terminis componitur, & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*; ita a, ab, abc sunt quantitates simplices. His præmissis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a & a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a & 2a, summa erit 3a, & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, & coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo + vel —, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coefficiens minor a majori subtrahi debet, & differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum, & positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis sunt directe contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint, signisque contrariis affectæ, vel se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis, & residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est, quantitates + 5df & — 3df reduci ad + 2df; nam 5df est quantitas df quinquies sumpta, & — 3df est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter + 5fm & — 6fm reducitur ad — 1fm, vel ad — fm. Nam — 6fm est quantitas fm sexies subtracta, & + 5fm est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, & remanet negativa, seu fit — fm. Eadem ratione operandum est in aliis

quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendæ ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur ut simplices, & additio fit ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt; scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex præsenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimiles, eas signo + vel — connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a & b, vel a & — b, scribendum est a + b, a — b.

Exemplum

$$\begin{array}{l} 3ab - 5cs - 4dr + 2s \\ -ab + 4cs + 4dr - s \\ \hline 2ab - cs \quad * + s \end{array}$$

PROBL. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. In subtractione considerantur quantitates singulæ subtrahendæ tanquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, & fiat summa ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum + in — & — in +, & additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo a — b. Si b — c ex a + c subtrahi oporteat, scribitur a + c — b + c = a — b + 2c. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur; deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda. Quod autem in quantitate subtrahenda signum — mutetur in +, ratio facile patet. Si ex a sub-

Exemplum.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd \end{array}$$

ſubtrahi debeat $b - d$, ſcribaturque primo $a - b$, ſubtractio juſto major eſt; ſubtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, ſed b mulctata quantitate d; quare juſto major eſt ſubtractio, & exceſſus eſt ipſa quantitas d, quæ proinde cum ſigno poſitivo $+$ reſtitui debet, & ſcribendum eſt $a - b + d$. Id vero numerorum exemplo illuſtratur. Si ex numero 6 ſubtrahendus proponatur numerus $5 - 3$, ex præſcripta regula ſcribendum eſt $6 - 5 + 3$, hoc eſt 4, reductione facta; quod evidens eſt. Si enim ſcriberes $6 - 5 - 3$; ſubtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim ſit $5 - 3 = 2$, ex numero 6 ſubtrahi debet duntaxat numerus 2. Cæterum patet in calculo litterali non ſecus ac in arithmetico, additionem, & ſubtractionem ſibi mutuam probationem præbere, ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. Signum multiplicationis eſt $\times$, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti ſolet, & ſola conjunctio litterarum ſine ſigno multiplicationem ſignificat. Sit $a = 2$, $b = 10$; erit $ab = 2 \times 10 = 20$. Si eadem quantitas per ſeipſam multiplicetur, apponitur poſt ipſam paulo ſupra numerus, qui exprimat quoties ſcribenda eſſet. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Cavendum ne confundatur a^2 cum $2a$; ſit $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$; ſit $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parentheſis autem ( ), vel lineola — producta deſignat totam quantitatem $a + b$ in ſeipſam multiplicari. Numerus ſupra poſitus eſt *index*, ſeu *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *poteſtatis*, ſeu *dignitatis* quantitatis ipſius, & exprimit quot vicibus unitas per illam quanti-

 tita-

titatem multiplicetur. Ita $1 \times a = a^1$; $1 \times a \times a = a^2$; $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

In quantitatum compositarum multiplicatione scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis, deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litteræ, & exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ. 1.ª Si signa fuerint eadem, positiva scilicet, vel negativa; productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$, $+ \times - = -$; $- \times + = -$; & $- \times - = +$. 2.ª Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3.ª Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4.ª Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis fiat exponentium summæ. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, & producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per $-b$, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes singulæ, ut moris est, in summam colli-

Exemplum.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \\ \hline a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \end{array}$$

colliguntur. Id vero pro majori additionis facilitate obſervandum eſt, ut ſcilicet ſimiles productorum partes aliæ ſub aliis ſcribantur & ſibi invicem reſpondeant, ut in additione præſcripſimus. Quod ſpectat tres ultimas operationis partes, hæ ſatis patent ex antea demonſtratis; verum quod attinet ſignorum leges, illarum rationem exponemus.

Signorum multiplicatio, quæ tyronibus difficultatem afferre ſolet, ex ipſa quantitatum negativarum natura intelligi poteſt. Dum quantitas poſitiva $+a$ multiplicatur per aliquem numerum poſitivum $+n$, ſenſus eſt quantitatem $+a$ toties ſumi, quoties unitas continetur in n, ac proinde productum fit na..... Si $-a$ multiplicari debeat per n, ſenſus eſt $-a$ quantitatem negativam toties ſumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum eſt $-na$. Simili modo ſi multiplicetur $+a$ per $-n$, ſenſus eſt quantitatem a, toties ſubtrahi quoties unitas continetur in n, ideoque productum eſt negativum ſeu $-na$. Si $-a$ multiplicare oporteat per $-n$, ſenſus eſt $-a$, toties ſubtrahendum eſſe quoties unitas eſt in n; ſed ſubtractio quantitatis negativæ $-a$, æquivalet additioni $+a$; quare productum eſt $+na$. Nemo non videt productum ex quantitate poſitiva in poſitivam fieri poſitivum, ſed alii caſus hoc modo rurſus illuſtrari poſſunt. Cum ſit $+a-a=o$, ſi multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet eſſe o. Jam vero primus producti terminus eſt na, ergo terminus alter debet eſſe $-na$, qui deſtruat primum terminum $+na$, ita ut productum ſit $+na-na=o$. Quare $-a \times +n = -na$. Simili modo, ſi multiplicetur $+a-a$ per $-n$, primus producti terminus eſt $-na$. Quare terminus alter eſt $+na$; alioqui termini duo ſeſe mutuo non deſtruerent; quod tamen fieri debet cum ſit $a-a=o$. Ergo $-a \times -n = +na$.

PROBL. IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. Signum divisionis est lineola interposita, dividendum separans a divisore, ita $\frac{a}{b}$, designat a dividi per b; divisio etiam designatur interpositis binis punctis hoc modo a : b. Verum his signis utendum est duntaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quæ unico constant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$, ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota divisionis operatio ut ex dividendo & divisore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est divisionem institui debere non secus ac in arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo & divisore deleantur litteræ communes, non tamen putandum est quotum ex quantitate per seipsam divisa esse $= 0$, ita $\frac{abc}{abc}$ non est $= 0$, delentur quidem litteræ omnes, sed quantitati litterali præfixus semper intelligitur coefficiens 1; sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu, quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, eædem omnino sunt quæ pro multiplicatione, nempe si + dividatur per +, & — per —, quotus signo + afficitur; contra autem si dividatur + per —, vel —

per

per $+$, quotus afficitur figno $-$. Tota explicatæ operationis ratio evidens eft ex ipfa divifionis natura; cum enim productum ex divifore in quotum dividendo æquale effe debeat, manifeftum eft quotum ex divifione quantitatis negativæ per negativam, oportere effe pofitivum. Ponamus enim effe negativum; jam productum ex quoto negativo in divifórem negativum foret pofitivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda quæ ponitur negativa. Simili ratione demonftrantur aliæ fignorum leges.

Eodem plane modo operandum eft in aliis divifionibus utcumque compofitis. Ita fi dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$ Singuli termini ita difponi debent ut fumatur divifionis initium ab illo termino, qui ad maximam evectus eft

Exemplum.

Dividendus	Divifor / Quotus
$6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$	
$6a^3 + 9a^2b$	$2a^2 - 3ab$
$* - 6a^2b + 9ab^2$	$3a - 3b$
$+ 6a^2b - 9ab^2$	
$* \quad *$	

poteftatem, & ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$, prodit quotus $3a$, per quem divifor totus multiplicatur, productumque $6a^3 + 9a^2b$ fubtrahas ex dividendo, refiduum fit $- 6a^2b$ cui addas $9ab^2$, & dividere pergas ut ante, quotus eft $- 3b$, productumque ex hoc quoto & divifore iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet; quare accurata eft divifio. Si autem peracta operatione aliquid fuperfit ita ut divifor & reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, jam divifio accurate fieri non poteft, fed quoto invento jungenda eft fractio: de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit divifionem in infinitum continuari, & tunc quotus fit, ut vocant, *feries infinita*. Exemplo fit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio eft hujufmodi.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 - a \\ \hline + a \\ + a - aa \\ \hline + aa \\ + aa - aaa \\ \hline + aaa \;\&c. \end{array} \left.\right\} \text{quotus est } 1 + a + aa + a^3 + a^4 \;\&c. \text{ in infinitum.}$$

Hæc pauca exempla satis sint. Cæterum patet multiplicationem & divisionem in quantitatibus litteralibus non secus ac in numeris sibi mutuam probationem conferre, ita ut multiplicatio per divisionem & viceversa divisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales, ad partes directe oppositas simul & in eodem subjecto conjunctæ intelligantur, sese mutuo destruunt illarumque effectus nihilo æqualis est. Ita si potentiæ duæ æquales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat, jam illi 100 nummi, si ad hujus hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat & 200 alteri debeat, jam possessio hujus hominis negativa est, &, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, jam hujus hominis iter tanquam negativum & minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est quid intelligatur per quantitatem negativam & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est, quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur ratione effectus tantum & *rela-*

relative, non autem *absolute*. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus ut nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

CAPUT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I. NUmeri fracti definitionem jam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem, interposita lineola, separantur ita ut dividendus supra lineolam & divisor infra scribantur in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$ &c. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, & divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ quantitates; ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tanquam unitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta tanquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem cujus denominator 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus 3 multiplicetur simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones in quibus numerator major est denominatore pro veris fractionibus non habentur,

at-

atque *improprie* duntaxat ita appellantur. Pari ratione si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem cujus denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet quomodo fractiones, quæ diversum habent denominatorem, ad eundem redigantur. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$, per d simulque dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per b, simulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eundem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius & viceversa, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est hanc operationem eandem esse pro quolibet fractionum numero; multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore, producta singula dabunt numeratores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducantur, habebitur denominator communis quæsitus; ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccd}{bcd}$. Patet rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* æquales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur & subtrahuntur fractiones, reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa vel differentia, & subscribatur denominator communis. In 1.° casu habe-

habebitur additio, in altero autem ſubtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{7}{12}$. Sed $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16 - 15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris & fractis compoſitæ qualis eſt $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtæ. Ex his autem ſtatim intelligitur quomodo numeri integri & fracti ſimul addi poſſint, vel a ſe invicem ſubtrahi; integri ad fractos reducantur & ad denominatorem communem, atque operatio fiat ut ante. Quamvis autem additionis & ſubtractionis operationes ex dictis ſint manifeſtæ, demonſtrari tamen poſſunt hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductæ, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{b} = n$, erit, facta multiplicatione per b, $a = mb$, $c = nb$, & $mb + nb = a + c$, ac proinde $m + n = \frac{a + c}{b}$; hoc eſt $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$. Simili modo patet eſſe $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a - c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus eſt ubi fractiones multiplicare & dividere oportet; in multiplicatione ſatis eſt numeratores & denominatores invicem ducere, habebitur numerator & denominator fractionis quæſitæ, quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero ſi fractio per aliam fractionem dividenda ſit, numerator dividendæ per alterius denomi-

nominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, erit, ut ante $a = bm$. Similiter ponatur $\frac{c}{d} = n$, erit $c = dn$. Jam demonstrandum superest esse $\frac{ac}{bd} = mn$, & $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, substituendo loco a & c, illorum valores bm & dn, erit enim in primo casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est ac proinde in numeris quibuslibet fractis eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus est $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat, considerari enim debet numerus integer tanquam fractio impropria, in qua denominator est unitas & reliqua peragenda ut ante. Quare patet in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem; quod quidem paradoxum videtur iis qui multiplicationis & divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri; *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$,

fra-

fractionis $\frac{1}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur duntaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{1}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet duntaxat pars tertia, duæ tertiæ partes sumendæ proponuntur, quare productum præcedens duplo majus fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos & singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variæ speciei agatur. E. G. Quæritur quanti constiterint 35 mensuræ mercis alicujus, si mensuræ unius pretium sit 24 nummorum, & assium 15. Multiplicentur primo 35 per 24, erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, considerari potest esse $15 = 10 + 5$. Jam si asses 10 nummo æquivalerent, productum foret 35. At sunt pars decima duntaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum est in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur, quæ ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio atque attentio multa docebunt, quæ fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam superest ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem præter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cujusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19; quos solas unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos præter unitatem alii

alii quoque numeri metiuntur; ſic 12 componitur ex 2 & 6, itemque ex 3 & 4. Quare 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, ſeu aliquoties ſumpti 12 adæquant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipſius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator ſit numerus, compoſitus, & reſolvi poſſit in alterius fractionis denominatorem, inſtituta diviſione per numerum, qui ſit etiam numeratoris diviſor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præſtari poteſt. Dividatur major numerus per minorem; ſi nihil ex diviſione ſuperſit, jam minor numerus eſt maximus diviſor communis. Si autem reſiduum aliquod fuerit, diviſor datus per hoc reſiduum dividatur; & ſi diviſio accurate fiat, primum reſiduum erit maximus diviſor communis. Si autem diviſio non ſit accurata, ſed alterum maneat reſiduum, per hoc ſecundum reſiduum dividatur primum; ſi autem nullum ſuperſit tertium reſiduum, jam reſiduum ſecundum pro maximo diviſore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil ſuperſit, atque ultimus diviſor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum menſura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris compoſita ad minimos terminos reducitur. Exemplo ſit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, reſiduum eſt 21. Rurſus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, reſiduum eſt 7. Tandem reſiduum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, & diviſio eſt accurata. Quare numerus 7 eſt maximus communis diviſor, per quem diviſis numeratore & denominatore, fractio præcedens in hanc ſimpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$. Æquales autem eſſe fractiones illas, ex natura diviſionis omnino patet. At ſi diviſione inſtituta, ad unitatem tandem ultimum reſi-

residuum perducatur, jam nulla est mensura communis præter unitatem. Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus; hoc solum observandum est, nempe quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, & quantitates secundum ejusdem litteræ dignitatem semper esse ordinandas; invenienda sit maxima communis mensura quantitatum $a^2 - b^2$, & $a^2 - 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 - 2ab + b^2$ per $a^2 - b^2$, residuum fit $- 2ab + 2b^2$, quod dividatur per $- 2b$, ut reducatur ad $a - b$. Iterum dividatur $a^2 - b^2$ per $a - b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a - b$.

Tota hujus operationis ratio pendet ex hoc divisionis principio; si nempe quantitas aliqua metiatur & divisorem & residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum; est enim dividendus æqualis producto ex divisore in quotum, & ipsi residuo simul. Ita in exemplo præcedenti $a - b$ metitur divisorem $a^2 - b^2$ atque etiam residuum $- 2ab + 2b^2$, quare metiri etiam debet summam $a^2 - 2ab + b^2$.

Porro ubi residuum fit nullum, seu dum accurate succedit divisio, evidens est divisorem haberi maximum; cum enim dividendus æqualis sit producto ex divisore in quotum & ipsi residuo simul; ubi residuum fit divisor accuratus, jam patet divisorem esse maximum; nulla enim quantitas habere potest divisorem seipsa majorem: ita sit $\frac{A}{B} = Q + R$; Q exprimit quotum, R residuum, erit $A = BQ + R$. Jam dividatur B, per R, & divisio succedat accurate, patet esse R, maximum divisorem communem; dividit enim B, ex hypothesi ac proinde & BQ; præterea dividit R; fieri autem non potest ut R, habeat divisorem seipso majorem. Quamvis in numeris & quantitatibus litteralibus eadem sit operatio, ut tamen divisor per residuum possit dividi, sæpe oportet primos ter-

minos ita præparare, ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris primo termino quantitates, quæ non habentur in primo termino dividendi; si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates, quæ non occurrunt in dividendo; atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in præcedenti exemplo, ubi perventum est ad residuum $-2ab + 2b^2$, residuum illud dividi præscripsimus per $-2b$. Hæc autem præscripta præparatio tota pendet ex hoc principio; nempe quantitates duæ A, B communem retinebunt maximum divisorem, si multiplicetur, vel dividatur quantitas alterutra, puta A, per quantitatem, quæ nullum cum quantitate B communem divisorem habeat. Illud autem principium ex ipsa divisoris communis notione est omnino evidens.

IV. De fractionum communi divisore unum addendum est, quod deinde utilitatis maximæ esse debet. Si numeri duo *primi* fuerint, aut eorum alteruter duntaxat *primus* fuerit; evidens est ex ipsa numerorum primorum definitione, & ex communium divisorum regula, numeros illos nullum, præter unitatem, divisorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis composita, puta $\frac{a}{b}$ ad simpliciores terminos reduci non potest. Ergo productum, ac, ex duobus numeris primis ab ipso b diversis non potest accurate dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$, erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$; quod fieri non potest; oporteret enim b & c habere divisorem communem, quod est contra hypothesim. Similiter ostendetur, fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua d est numerus primus, ad sim-

pli-

pliciorem expreſſionem reduci non poſſe, atque ita deinceps; nempe generatim productum ex numeris primis quibuſcumque diviſum per productum ex aliis quibuſcumque numeris itidem primis ad ſimpliciores terminos reduci non poteſt. Quare ſi $\frac{a}{b}$ ſit fractio ad minimos terminos reducta, erunt quoque $\frac{aa}{bb}$, $\frac{a^3}{b^3}$, & generatim $\frac{a^n}{b^n}$ fractiones ad ſimpliciſſimos terminos redactæ; ac proinde fractio quælibet ſive pura, ſive mixta ad potentiam quamlibet evecta ſemper manet fractio.

Scholium. Præter fractiones in hoc capite explicatas conſiderari etiam debent fractiones, quæ *decimales* appellantur. Illæ ſcilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot ſequentibus cyphris, quot ſunt numeri in numeratore; atque eam ob cauſam non ſcribitur denominator, ſed numerator duntaxat, cujus numeris præfixa eſt virgula, alii punctum præfigunt; quod fit, ut numerator a numeris integris diſtinguatur. Ita ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$ ſcribi ſolet 19, 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$ ſcribitur 19,04; cyphra numero 4 præfixa indicat denominatorem eſſe 100; $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium ſignificatione patet, primum numerum poſt virgulam deſignare decadas, ſecundum centenarios, & ita deinceps per decadas ſemper progrediendo; ſic 4, 217 $= 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima eſt ad obtinendum quotum proxime verum, ſi diviſio accurate fieri non poſſit. E. G. Si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum reſiduo 141, cui addatur o,

tur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur 0, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0,75$. Et requidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c., productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cujus denominator est 100, vel 1000 &c. Sæpe tamen contingit fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphræ addantur. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$, in qua n, exprimit cyphrarum numerum; erit $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed $10^n = 2^n 5^n$, ac proinde $r = \frac{p \times 2^n 5^n}{q}$. Ut autem r fiat numerus integer, oportet ut q, sit æqualis potestati alicui numeri 2, vel 5, vel producti 2×5, vel etiam alicui potestati numeri 2, per aliquam potestatem numeri 5, quas tamen potestates minores esse oportet, quam n, est enim $\frac{p}{q}$, fra-

ctio

ctio ad minimos terminos reducenda (ex hyp.) ideoque p, q, nullum habent divisorem communem; in quolibet alio casu, fractio $\frac{p \times 10^n}{q}$ nunquam fieri poterit numerus integer r. At quo major erit numerus n, hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore fractionis, eo propius $\frac{r}{10^n}$ accedet ad valorem fractionis $\frac{p}{q}$, ita ut error sit minor quam $\frac{1}{10^n}$. Etenim si dividatur $p \times 10^n$ per q, quotus r, erit justo minor; si vero augeatur unitate, fiet justo major. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est quam $\frac{p}{q}$ & $\frac{r+1}{10^n}$ major. Hinc patet utilissimum esse fractionum decimalium usum, cum earum ope fractionum valor accuratus quam proxime haberi possit.

Quatuor Arithmeticæ operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula ut totidem post se notas relinquat quot erant in utraque fractione; tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto & divisore simul totidem esse debent post virgulam notæ quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.	*Subtractio.*
23, 304	49, 638
3, 9567	17, 16
149, 86	32, 478
177, 1207	

Multiplicatio.	*Divisio.*
	$\dfrac{8,445}{3,22} = 2,6$
12, 35	6, 44
4, 2	
24, 70	2, 005
49, 40	1, 932
51, 470	73

Unum autem in divisione notandum est; si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges quot volueris cyphras, ita ut tamen notæ decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis præcedentis $8,44 = \frac{8044}{1000}$ & $3,22 = \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam; evidens autem est cyphram unam duntaxat in quoto adesse & hinc facile intelligetur cyphrarum numerum in quoto esse semper æqualem differentiæ cyphrarum in divisore & dividendo. In aliis tribus regulis facilius patet operandi ratio.

CAPUT V.

De radicum extractione.

I. EXplicavimus jam in capite 2.° quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primus gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a, est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*, ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix* quæ vocatur *quadrata*,

drata; ſi poteſtas ſit ſecunda vel quadratum. Si quadratum in ipſam quantitatem ducatur, productum dicitur *poteſtas tertia* vel *cubus*, ita a^3 eſt cubus ipſius a; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim ſi quantitas evehatur ad poteſtatem cujus index eſt n, habebitur poteſtas gradus n. In hoc autem capite præſertim conſiderabimus radicum quadratæ & cubicæ extractionem; quod ut clare fiat, ipſam quadrati & cubi formationem primum inveſtigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis, $a + b$, ad quadratum evehenda, prodit $a^2 + 2ab + bb$. Jam vero quadrati hujus formationem, ſeu partes ſingulas expendamus. Quadratum binomii $a + b$ continet 1.° Quadratum aa, primæ partis a. 2.° Productum 2ab, ex duplo primæ partis in ſecundam. 3.° Quadratum partis ſecundæ nempe bb. Simili modo ſi multiplicetur $a + b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum $a^2 + 2ab + b^2 + \overline{2a + 2b} \times c + c^2$. In hoc quadrato rurſus conſiderandæ ſunt partes ſingulæ; continent 1.° Quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$. 2.° Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2, tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis compoſita; tales vero quantitates magis compoſitæ appellari ſolent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad 3.^am poteſtatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes ſingulæ ſunt 1.° Cubus primi termini, nempe a^3. 2.° Productum ex quadrato a^2 primi termini in triplum terminum ſecundum, ſcilicet $3a^2b$. 3.° Productum ex primo termino a, in triplum quadratum ſecundi termini, nempe $3ab^2$. 4.° Cubus ſecundi termini ſcilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a+b+c$ invenieturque cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$. In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum nempe $a^3+3ab+3ab^2+b^3$, diligenter considerari debent aliæ partes. 1.° Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c+6abc+3b^2c = \overline{a^2+2ab+bb}\times 3\times c$. 2.° Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $+3ac^2+3bc^2 = \overline{a+b}\times 3\times c^2$. 3.° Tandem tertii termini cubus, nempe c^3.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2-ax+\frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata x, cujus quadrato subtracto remanent termini duo $-ax+\frac{1}{4}a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x per quod dividatur secundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$, qui multiplicetur per x. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex residuo $-ax+\frac{1}{4}a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x-\frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero præcedenti. En typus calculi. Cæterum si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent & reliqua peragenda ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

$$\begin{array}{l} x^2-ax+\frac{1}{4}a^2\ (x-\frac{1}{2}a \\ x^2 \\ \hline 2x-\frac{1}{2}a)\ -ax+\frac{1}{4}a^2 \\ \times-\frac{1}{2}a)\ \underline{-ax+\frac{1}{4}a^2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \quad\ 0 \end{array}$$

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3-3c^2y+3cy^2-y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica quæ est c, cujus cubus c^3 aufe-

auferatur, remanent termini $-3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum est secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c, triplum quadratum per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$, qui erit secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet continet cubum ex duobus primis terminis radicis, sumatur cubus terminorum $c - y$, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet, ac proinde radix accurata est $c - y$. Totus calculi typus ex præcedenti facile intelligitur.

III. Ex demonstrationibus præcedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis. Extrahenda sit radix quadrata, ut in præsenti exemplo. Numerum datum in classes divide quarum singulæ duas notas contineant, initio a postremis facto; nihil autem refert sive unica tantum nota constet prima classis sive notis duabus. Quære radicem veram aut proxime veram numeri 38, quæ in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis & ejus quadratum 36 aufer ex 38. Residuo 2 adjunge notas classis proxime sequentis, & hujus novi numeri postrema nota neglecta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ sive 12 contineatur in 29, invenietur 2, scribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50; huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis. Rursus contempta novi numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inven-

Exemplum.

38, 94, 89 | 624, 09
36
294
122
244
5089
1244
4976
11300
12480
0
1130000
124809
1123281
6719, &c.

inventæ ſcilicet 124 contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero ſuperiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, reſiduum eſt 113. Quare radix proxime vera numeri propoſiti eſt 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus ſi numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non ſit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Reſiduo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis cujus duplum ſumatur nempe 1248, dividaturque 11300 per 1248, quotus eſt 0; quare ſcribe 0, in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0, aufer ex 11300, remanet 11300. Huic reſiduo iterum addantur cyphræ duæ; ſumaturque duplum radicis nempe 12480 per quod dividatur 113000, ſcribaturque quotus 9, in radice per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, reſiduum fit 6719. Operatio rurſus continuari poſſet, ſed ſatis patet methodus cujus ope radicem proxime veram obtinere licet & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifeſta eſt ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis ſerie idem notare oportet quod in diviſione obſervatum eſt; nempe ſi poſt adjectas alicui reſiduo notas duas claſſis proxime ſequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus eſt; poſtrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra ſcribenda eſt in radice, & claſſis proximæ notis duabus demiſſis, operatio continuanda. Evidens autem eſt hanc operationem eſſe diviſioni ſimillimam in qua radix ſit quotus, diviſor vero ſit duplum radicis poſtremo inventæ auctum nota quæ deinceps inveſtigatur. Hoc unum intereſt quod in diviſione diviſor ſemper eſt idem, hic autem ſemper augetur; in diviſione totus diviſor cognoſcitur, hic autem ignota eſt novi diviſoris nota,

quæ

quæ inquiritur; atque id in causa est cur in hac divisione instituenda postrema dividendæ quantitatis nota prætereatur. Si contingeret divisorem esse majorem. V.G. in præsenti exemplo si productum ex 2, in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsenti exemplo post duplum primæ radicis 12, scribitur 2, totusque numerus 122, multiplicatur per novam radicem 2; operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 2, in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis & iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in præsenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas incipiendo a postremis notis, prima classis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri 5, proxime minor quæ est 1. Hujus cubus 1, subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides.

Exemplum.

5,305,472 | 174,4
1
————
4305,
300
————
2100
1470
343
————
3913
————
392472
86700
————
346800
8160
64
————
550324
————
37448000

des. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1, pro decade haberi debet si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10, quadratum 100 & per illius triplum 300, dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea $7 \times 7 = 49$, & $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, quod scribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 & 343 & summa 3913 auferatur ex numero 4305, residuum est 392. Demittatur classis tertia 472 & duæ primæ partes radicis velut pars unica considerentur. Hæc autem pars quæ est 17, æquivalet 170 si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800 quod infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4 nempe 64. Addantur tres illæ quantitates quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot esse radicis partes quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam

eam duntaxat in radice partem habere potest; consideretur numerus 99, omnium qui duobus constent notis maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10, consideremus; quadratum erit 100 quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima quæ tres habeat notas est 100, cujus radix quadrata est 10 quæ proinde duas continet notas; at quantitas omnium maxima quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000 quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Manifestum est extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur productoque addatur residuum, si aliquod fuerit, facta operatione restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\surd$ quod *radicale* appellant. Sic $\surd 3$ significat radicem quadratam numeri 3; $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri quos arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus

bus idem ſignum præfigitur: ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, ſignificant radicem quadratam ipſius ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix ſecunda vel quadrara exprimi ſolet per $\frac{1}{2}$ radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$, ſignificat radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expreſſionum notio habeatur, meminiſſe oportet quæ antea de exponentibus breviter dicta ſunt. Ponamus $a = b^2$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3, indicat quantitatem bb, ter ſcribendam eſſe, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ deſignat litteram b, dimidio minus ſumendam eſſe quam in bb, ac proinde ſemel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuſcumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illuſtrabitur, explicatis quatuor arithmeticæ operationibus in quantitatibus ſurdis.

Quantitates ſurdæ adduntur vel ſubtrahuntur facillime, ſi ejuſdem ſint exponentis & eandem habeant ſub ſigno radicali quantitatem. Si autem res non ita ſe habeat, ſæpiſſime contingit quantitates ſurdas ejuſdem ordinis ad eandem quantitatem ſub ſigno radicali poſſe revocari. Ita ſi addi vel ſubtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1.° caſu habebitur $9b\sqrt{3a}$, in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo conſiſtit ut numeri ſub ſigno radicali poſiti quærantur diviſores, inter quos ille eligatur, ſi quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejuſdem ordinis, cujus eſt ſurda quantitas. Si aliquem ejuſmodi diviſorem invenias, ejus radicem præfige ſigno radicali quo inclu-

cludatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo $+$ connectendæ, in subtractione autem signo $-$ separandæ.

Demum multiplicantur & dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, & producto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ erit $\frac{a\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic $\sqrt{a^3c} \times \sqrt{a^3c} = a^3c$. Quoniam sæpe contingit quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas esse, observandum est id facile præstari posse ex hactenus demonstratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^m}{c^m}}$, & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{d^n}}$, quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2 productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3\times2} = a^6$, & generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at

at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates evidens est ex capite præcedenti in quo demonstravimus fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et nequidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus quam rationem quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura: ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus; talis quantitas proprie non existit eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem, alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$ & major quam 2, cum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3, ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto, sed fieri non potest ut fractio mixta per seipsam multiplicata producat

eat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ duntaxat & tertiæ potestatis compositionem ac resolutionem in præsenti capite explicavimus; at rem generatim & breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate consiberabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est eodem modo formari altiores cujuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem multiplicari debet cubus per suam radicem & sic deinceps. Jam in singulis terminis exponentes & coefficientes diligenter observemus. In potestatis cujuslibet compositione, primus terminus a, binomii cujuslibet, $a + b$, evehitur ad potestatem quæsitam V. G. a^2, si potestas secunda fuerit: in aliis sequentibus terminis exponens quantitatis a, per unitatem decrescit & in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habetur $2ab + b^2$. Contra autem potestas termini b, in primo termino non reperitur, sed in 2.° termino illius exponens est unitas, in 3.° termino est 2, & ita crescit per gradus, donec in ultimo termino exponenti potestatis quæsitæ æqualis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius a, crescunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, & potestatis quæsitæ exponenti æqualis: quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas 6ª binomii $a + b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, in qua observare est exponentes quantitatis a, decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; summaque exponentium in utroque termino est semper 6. Jam superest ut singulo-

gulorum terminorum coefficientes observemus. Dividatur coefficiens præcedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius a, in eodem termino, auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo ubi termini sunt, a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^4b^2, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est unitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{1} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3 \times 5 = 15$. Coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium & coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium $a+b$ ad potestatem quamlibet m, evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, quæ series continuari debet, donec exponens quantitatis b, evadat m. Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $\frac{m \times m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, & ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula $\overline{x+a}^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} a + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times x^{m-2} a^2 + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} + \frac{m-2}{3} x^{m-3} a^3$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a-b}^m$, hoc solum discrimine quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis b, sit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, secundus & quartus termini sunt negativi; ratio autem est evidens, cum negativa existente quantitate, multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a+b+c$, ponendo $a+b = a$, & ita deinceps pro polynomio quolibet.

Præ-

Præcedens formula quæ poteſtatum compoſitionem exhibet, earum quoque reſolutionem repræſentare poteſt. Ita radix quadrata binomii $a + b$, nihil eſt aliud quam poteſtas binomii $a + b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} + \frac{1b^3}{16a^3} \&c\right)$ Simili modo ſi extrahenda ſit *radix* quinta ex $a + b$ habebitur $\overline{a+b}^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{\frac{9}{5}} b^2$ &c. $= a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa}} + \&c.$ Itaque ad radicem proxime veram accedere poſſumus per ſeries infinitas, dummodo ſeries illæ ſint *convergentes*, hoc eſt, ſi termini perpetuo decreſcant.

CAPUT VI.

De proportionibus.

I. IN memoriam revocanda eſt explicata cap. 1.° rationis & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo*, qua ad ſe invicem referuntur; *geometrica* dicitur ſi in ea relatione conſideremus quomodo quantitas una alteram contineat; *arithmetica* vocatur, ſi exceſſum tantummodo unius ſupra aliam ſpectemus. In omni ratione quantitas quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *conſequens* appellatur. Ratio geometrica dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla* &c., ſi antecedens bis, ter, decies &c. conſequentem continet; contra vero *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubdecupla* &c., ſi bis, ter, decies &c. antecedens in conſequenti continetur. *Exponens* rationis geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per conſequentem diviſo; exponens vero rationis arithmeticæ eſt differentia conſequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad inſtar fractionis ſcribi-

tur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate; igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & *prima ad secundam esse* dicitur *ut tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente secundæ, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio geometrica $a, b :: c, d$, vel $a : b = c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, arithmetica vero $a - b \div c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione, quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a + b$, e, $e + b$. Si autem talis proportio continuetur ita ut quantitates per eandem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, jam habetur series vel *progressio arithmetica*, qualis est ista a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., vel hæc alia x, $x - b$, $x - 2b$ &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c., & 10, 4, 1, -2 -5 -8 &c. Ex ipsa proportionis arithmeticæ natura evidens est summam extremorum terminorum æqualem esse summæ mediorum. Ita in proportione arithmetica c, $a + b$, c, $c + b$, manifestum est summam extremorum $a + c + b$, æqualem esse summæ mediorum $a + b + c$. Hinc datis tribus quantitatibus facile invenitur quarta arithmetice proportionalis; addantur scilicet secunda & tertia atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint priores termini a, $a + b$, $a + 2b$ &c., sitque ultimus terminus x, erit penultimus

mus $x - b$, antepenultimus $x - 2b$ &c. Jam comparentur inter se termini qui ab extremis æque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b \text{ \&c.} \\ x, x-b, x-2b, x-3b, x-4b \text{ \&c.} \\ \hline a+x, a+x, a+x, a+x, a+x \text{ \&c.} \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, & qui ab extremis æqualiter distant sibi invicem addantur, habebitur semper $a+x$, hoc est, summa primi termini a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens est summam omnium terminorum in progressione arithmetica æqualem esse producto ex summa primi & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat, patet hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino x, habebitur $\overline{n-1} \times b$, nempe $x = a + \overline{n-1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an+n^2b-nb}{2} = \left(a + \frac{nb-b}{2}\right) \times n$. E. G. Series arithmetica $1+2+3+4+5$ &c. ad 100 terminos producta $= \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2} = 5050$.

At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit $a = o$, summa terminorum quæ generatim exprimitur per $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{xn}{2}$.

 Unde

Unde evidens eſt ſummam numeri cujuslibet terminorum in progreſſione arithmetica cujus primus terminus eſt,o, æqualem eſſe dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progreſſio arithmetica:

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{9+9+9+9+9+9+9+9+9+9}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis ſit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates ſunt *geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales ſunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipſa proportionis geometricæ natura evidens eſt productum ex terminis extremis æquale eſſe producto ex mediis, ſic $a \times br = ar \times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis, multiplicando ſcilicet duos medios terminos productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæſitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} = br$. At ſi proportio ſit continua, ita ut ſecunda quantitas ſit primæ rationis conſequens & ſimul ſecundæ rationis antecedens, ſimili ratiocinatione patet ſumendum eſſe hujus quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem eſſe dividendum. Hæc autem quantitas quæ antecedentis & conſequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, taliſque proportio ita exprimi ſolet ∺ a, b, c, nempe hoc ſcribendi modo ſignificatur b, eſſe mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita deſignatur ÷ a, b, c, patet autem in hac proportione ſummam extremorum æqualem eſſe termino medio bis ſumpto.

Ex

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgatissima arithmeticæ operatio quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet; per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem considerandа est quantitas quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsita. Ex quæstionis natura intelligitur an quantitas data sit major vel minor quantitate quæsita; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dextram collocanda. Constituto autem convenienti terminorum ordine, jam ex præscripto regulæ, productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio: Si triginta operarii dierum 12 spatio opus aliquod absolvant, quæritur necessarius operariorum numerus ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primum considerandus est numerus 30; statim autem vides numerum illum datum majorem esse numero quæsito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dextram, atque ita operatio peragitur, hoc ordine

$$18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica, diversa ab arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione, aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum primi & secundi refertur ad secundum ut summa terminorum tertii & quarti

ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi & secundi differentia ad secundum referatur ut differentia tertii & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale semper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duæ proportiones

$$a:b=c:d, \text{ erit } af:bg=cm:ds.$$
$$f:g=m:s$$

Etenim productum extremorum afds æquale est producto mediorum bgcm. Et quidem $a:b=c:d$, ac proinde $ad=bc$. Præterea $f:g=m:s$, ideoque $fs=gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs}=\frac{bc}{gm}$. Atque eadem valet demonstratio pro alio quolibet proportionum numero; ratio ex duabus æqualibus composita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio geometrica quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius est duplicata ejus quam habent ipsæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata &c. Et contra ratio quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata* &c. rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est, ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter se connexæ sint ut si una dupla, tripla &c., altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa*,

versa, sive *reciproca* istius. Verum si duæ quantitates ita sint invicem connexæ ut altera crescat in eadem ratione qua primæ quadratum aut cubus &c. tunc illa ad hanc esse dicitur in ratione duplicata, triplicata &c. At si in eadem ratione una decrescit qua crescunt alterius quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione hujus *reciproca* duplicata aut triplicata &c.

VI. Ex mediorum & extremorum producto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper æquale est producto ex secundo & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo & ultimo æqualiter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator aut divisor *ratio communis* dici solet, sitque y, ultimus terminus; erunt quatuor ultimi termini $y, \frac{y}{r}, \frac{y}{r^2}, \frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ &c. Præterea summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo, per communem rationem multiplicatæ. Nam $ar + ar^2 + ar^3 + \&c. + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y = r \times (a + ar + ar^2 \&c. + \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r})$. Quare si progressionis summa dicatur s, erit $s - a = \overline{s - y} \times r$. hoc est, $s - a = sr - yr$, vel $sr - s = yr - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$. Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius r, post secun-

cundum terminum perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit n — 1 exponens ipsius r, in ultimo termino, ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{n-1+1} = ar^n$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero & communi ratione, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$ &c. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$, posito terminorum numero infinito, ultimus terminus a, fit $= 0$. Cum enim n, sit infinitus ac proinde & r^{n-1} erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa talis seriei $s = \frac{yr}{r-1}$, quæ est summa finita, quamvis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= 2$.

Schol. Ad progressiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in universa mathesi, sed rem breviter attingere nobis satis erit. Progressio quælibet geometrica hac formula potest repræsentari $\div\!\!\div aq^0, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5$ &c. in qua a, & q, exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, præcedens series abit in hanc $\div\!\!\div q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5$ &c. Inde autem duo colliguntur. 1.° Productum ex duobus quibuscumque hujus progressionis terminis, pro exponente habet ipsorum exponentium summam: Ita productum ex $q^3 \times q^4 = q^7$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus qui sit duorum aliorum producto æqualis, quæratur terminus cujus exponens est ipsa duorum exponentium summa.....
2.° Quotus ex duobus terminis emergens, ipse est terminus cujus exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^3 per q^3, quotus est q^{3-3}. Quare si inve-

veniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto æqualis, quæratur terminus cujus exponens æqualis est exponentium differentiæ.

Si ponatur progressionis geometricæ terminus aliquis q, atque exponens rationis sit $\frac{1}{n}$, progressio quælibet geometrica hac serie in infinitum repræsentari potest .... qn^{-5}, qn^{-4}, qn^{-3}, qn^{-2}, q^{-1}, q, qn, qn^2, qn^3, qn^4, qn^5 &c. ut patet. Si infra progressionem geometricam scribatur progressio arithmetica, ita ut singuli termini unius respondeant singulis terminis alterius, terminus quilibet progressionis arithmeticæ appellatur *logarithmus* termini respondentis in progressione geometrica. Inde autem patet multipliciter variari posse logarithmorum formam. Etenim si duæ sint progressiones quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primæ terminis singuli secundæ scribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum *logarithmi*: at in vulgari logarithmorum systemate, numeri alicujus logarithmus vocatur exponens potestatis numeri denarii qui sit numero dato æqualis; ita si habeantur progressio geometrica ∺ 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, & infra scribantur eorumdem terminorum valores ∺ 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. exponens 0 est logarithmus unitatis, exponens 1 est logarithmus numeri 10, & ita deinceps. At quia exponentes illi exhibent duntaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000 &c., necessum est præterea haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 &c. Qua ratione autem formari possint logarithmorum tabulæ breviter exponam; neque enim doctrinam hanc fusius explicare licet pro injuncta his elementis facilitate.

Ut habeatur numeri alicujus dati E.G. 3 logarithmus, oportet numerum hunc inveniri in progressione geometrica 1, 10, 100 &c. quod ex dictis patet. Por-

Porro quamvis non pateat numerum 3, locum habere posse in prædicta progressione, evidens tamen est, inferendo inter 1 & 10, terminos medios geometrice proportionales, obtineri numeros inter 1 & 10 eo proximius quo major est terminorum numerus, unde fiet ut horum terminorum mediorum aliquis vel sit numerus 3 accurate, vel inveniantur termini duo contigui, inter quos numerus 3 contineatur proxime. His positis, inter 0 & 1, inseruntur tot medii arithmetice proportionales quot medii geometrici inseruntur inter 1 & 10. Quo facto, sumetur pro logarithmo numeri 3, terminus progressionis arithmeticæ respondens termino jam invento in progressione geometrica. Hoc artificio & patientissimo multorum annorum labore supputatæ sunt logarithmorum tabulæ.

Commodissimæ sane sunt tabulæ illæ; etenim cum demonstratum sit productum ex duobus numeris logarithmorum summæ respondere, eorum vero differentiæ respondere numerorum quotum, per solam additionem & subtractionem compendiose absolvi possunt multiplicatio & divisio. Sumantur datorum numerorum logarithmi simulque addantur, numerus summæ respondens in logarithmorum tabulis erit logarithmus producti; contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæsiti. Simili ratione patet numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si toties sumatur numeri dati logarithmus, quoties per se ipsum numerus multiplicandus proponitur, hoc est, logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet,& productum erit quæsiti numeri logarithmus; contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæsitus radicis logarithmus.

APPEN-

APPENDIX

De Æquationibus.

I. ÆQuatio dicitur propositio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interposito æqualitatis signo $=$. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræsentat, si ex una æquationis parte habeatur quantitas sola quæsita; in parte autem altera occurrant quantitates quæ omnes sint cognitæ. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni æquatione resolvenda id curandum est, ut nempe quantitas, cujus valor quæritur, in una æquationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex duntaxat æquationum genus considerabimus, eas scilicet in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus.... 1.° Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc exemplo. $5x + 50 = 4x + 56$, $5x - 4x = 56 - 50$ & $x = 6$.... 2.° Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12$ & $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$, erit $x + 20 = 50$, & $x = 50 - 20 = 30$... 3.° Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum & mediorum multiplicatio-

tione. Sit $12x : \frac{1}{2} = 4 : 1$, erit $12x = 2$, & $x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Simili ratione proportio arithmetica in æquationem per additionem mutari potest..... 4.° Loco quantitatis cujuslibet in æquatione, alia ejusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, & $y = 9$, erit $3x = 24 - 9 = 15$, & $x = \frac{15}{3} = 5$..... 5.° Si pars æquationis quantitatem quæsitam continens, signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $\sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$, quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$.

II. His præmissis permutationum regulis quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam problema aliquod unius dimensionis solvendum proponemus. Et primo quidem quæstionis propositæ distincta habeatur notio & singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita exprimantur ut tot habeantur incognitæ quot æquationes, poterit semper deveniri ad unicam æquationem quæ unicam incognitam habeat. Nam sint. E. G. 10 æquationes & totidem incognitæ, poterit, conferendo primam cum secunda, eliminari per regulas præscriptas una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem quæ illa careat; tum idem præstari poterit conferendo primam cum tertia & ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis & ita porro, donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot æquationes quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum* & solutiones habet infinitas. Æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$, est

est æquatio determinata, sed $x + y = 12$, est indeterminata; etenim si ponatur $x = 1$ & $y = 11$, vel $x = 2$, & $y = 10$, & ita porro, semper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti sint valores qui pro x & y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis quos annuatim impendit in sumptus, & post tres annos fit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendæ & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam, quæ dicatur x. Anno primo expendit nummos 100. Quare residuum, $x - 100$. Quod adauget triente, ideoque habetur $x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$. Anno secundo expendit nummos 100, quare residuum $\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$, quod adauget triente, ideoque fit $\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$. Anno tertio expendit nummos 100, ideoque residuum $\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$, quod adauget triente; quare fit $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$. Tandem post tres annos fit duplo ditior; ergo $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$; ex hac æquatione fit $64x - 14800 = 54x$, atque $x = 1480$. Quare habentur nummi in ipso initio atque etiam lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem quæ ipsum quantitatis incognitæ quadratum, & præterea productum ex ipsa quantitate inco-

incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos quæ incognitam quantitatem continent ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis quæ incognitam quantitatem continet ad perfectum quadratum reducta habebitur, ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit & deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b^2$, addatur hinc & inde quadratum dimidii coefficientis a, erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$, extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$, & tandem $y = \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$.

Diligenter observandum est radici quadratæ præfixum fuisse signum $\pm$ hoc est, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis ut a^2, potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque $y + \frac{a}{2} = +\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$, vel $-\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$; cum $-\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b^2 + a^2$ non secus ac facit $+\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt solutiones: Sic in præsenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $y = +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet quantitatis negativæ radicem esse impos-

impoſſibilem ſeu aſſignari non poſſe, quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit æquationes nullam ſolutionem admittere. Exemplo ſit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = -3a^2$, & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$, extractaque radice, habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifeſtum eſt duos valores radicis y eſſe imaginarios, cum aſſignari non poſſit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in ſolutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, ſignum eſt admodum manifeſtum vel problema eſſe impoſſibile, vel adhibitam eſſe methodum, quæ aliquid impoſſibile involvit, prorſus ut fit in argumentatione dum res ad abſurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habent ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$ per multiplicationem efficere poſſunt productum reale in quo nullum ſuperſit ſignum radicale, dummodo radices illæ numero pari ſemper multiplicentur. Etenim evaneſcere non poteſt ſignum radicale, niſi terminus hoc ſigno affectus multiplicetur per alium terminum, qui idem ſignum radicale habeat & eandem quantitatem ſigno incluſam. Jam vero ita ſublato ſigno radicali, ſi productum ex prima multiplicatione per idem ſignum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque ſigno radicali; at ſi rurſus multiplicetur per idem ſignum radicale, iterum evaneſcet ſignum radicale & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale eſt polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evaneſcere non poteſt ſignum radicale, niſi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum quoad ſignum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio propoſito ſolum productum

ex $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$, sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$, esse necessario positivum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quæ ex realibus & imaginariis sunt mixtæ, realis esse potest; ita quantitatum $3 + \sqrt{-1}$ & $8 - \sqrt{-1}$, summa est realis nimirum 11, atque etiam realis est differentia nempe 5. Patet autem æquationes omnes secundi gradus posse repræsentari per hanc formulam $x^2 - px = q$, in qua p, q, designant quantitates quaslibet vel positivas, vel negativas.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quæcumque luminaria conjungente punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio ut m ad n; præterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quæsito, erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Jam ponatur luminarium effectus seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a Physicis; sumptis distantiarum quadratis, erunt intensitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita se haberet si æqualia forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates absolutæ sunt ut m ad n, erunt luminarium effectus ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$.

Ita-

Itaque ut habeatur punctum quæsitum, instituenda est æquatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$, ex qua, per reductionum regulas, eruitur $xx + \frac{2amx}{n - n} = \frac{aam}{n - m}$, & addito, ut moris est, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n - m} + \frac{aamm}{\overline{n - m}^2} = \frac{aam}{n - m} + \frac{aamm}{\overline{n - m}^2}$

Hujus æquationis radices duæ sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = - \frac{am}{n - m} \mp \frac{a}{n - m} \sqrt{mn}$, vel $x = \frac{a}{n - m} \times \overline{- m \mp \sqrt{mn}}$. Ex his evidens est unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo $-$ afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; si autem afficiatur signo positivo $+$, jam quantitas $- m + \sqrt{mn}$ erit positiva, cum sit (ex hypoth.) n major quam m, ideoque $\sqrt{mn}$, major quam m.

Superest ut radicis negativæ usum explicemus. In memoriam revocanda sunt, quæ de quantitatibus negativis jam dicta sunt, scilicet quantitates negativas secundum directionem positivis oppositam sumendas esse. In præsenti problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, si observemus punctum quæsitum a nobis considerari tanquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quæsitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit positivus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x; ut ante, erit luminaris majoris distantia, $a + x$, quadrata autem distantiarum erunt xx & $aa + 2ax + xx$, quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent maa

 $+ 2amx$

$+ 2amx + mxx = nxx$; resoluta æquatione habetur $x = a \times \frac{m \pm \sqrt{mn}}{n - m}$; valor $a \times \frac{m + \sqrt{mn}}{n - m}$ erit positivus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor negativus $a \times \frac{m - \sqrt{mn}}{n - m}$ significat sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, sed in ipsa linea jungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$, præcedens formula $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} \times \pm 2 - 1$. Quare duplex valor radicis x erit $+ \frac{1}{3} a$ & $- a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo major erit quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantiæ. Facile autem sine ullo Algebræ auxilio intelligitur utrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori quæ vim habet quadruplo majorem. Hoc exemplo illustrantur quæ de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ & Algebræ elementa, brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse judicavimus.

F I N I S.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PROEMIUM

De definitione & divisione Geometriæ.

I


Eometria est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum* & *linearum*. Solidum est magnitudo in longum latum & profundum extensa. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum quod tres illas dimensiones simul non habeat, illæ tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei & lineæ. Superficies est magnitudo tantum in longum & latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et requidem ipsa, itineris longitudinem nobis repræsentamus, non attenta ejus latitudine, & planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineæ terminum, cujus nulla pars sit, nulla extensio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem, id primum ostendi debet quomodo per varios abstractionum gradus ex corporis *physici*, & prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici* & simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei & lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur qui

 statim

statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione nascitur divisio geometriæ in geometriam linearum, superficierum & solidorum. Quare tres erunt geometriæ sectiones. 1.ª De lineis. 2.ª De superficiebus. 3.ª De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cujus utilitas est maxima in considerånda linearum rectarum mutua positione. Quare ad geometriæ elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates & mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

II. Lineam repræsentare solent Geometræ tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est ita simplicem esse rectæ & curvæ notionem ut ad clariorem ideam magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam. Cæterum inde evidens est datis in linea recta punctis duobus, datam esse hujus lineæ positionem, ita ut unica duntaxat recta per hæc duo puncta transire possit. Ex his etiam intelligitur quid sit superficies plana, omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ *peripheria* dicitur, sive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ, æquales sunt inter se; circumferentiæ pars quælibet

libet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta & utrinque terminata, *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ *ſemidiametri* vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum menſura eſt arcus, quem ipſorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice tanquam centro deſcripti. Porro dum dicitur anguli menſuram eſſe arcum circuli, nihil aliud ſignificatur niſi æquales eſſe angulos, ſi æquales ſint arcus ex angulorum vertice & eodem radio deſcripti. Ita dum dicitur angulum eſſe alterius duplum, nihil aliud intelligitur niſi arcum unum altero eſſe duplo majorem. Itaque anguli natura in majori aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam conſiſtit. Igitur angulus cum ſit mera linearum inclinatio & *apertura*, extenſio vel quantitas proprie loquendo dici non poteſt; ac proinde, abſtractione facta ab omni extenſionis conſideratione, angulum alterius duplum dicere non poſſumus, cum id dici poſſit duntaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non eſt quantitas proprie dicta, atque hinc factum eſt ut anguli menſuram cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi ſolet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; ſinguli gradus dividuntur in 60. minuta prima, quodlibet minutum primum dividimus in 60. ſecunda & ſic in infinitum. Gradus per o, deſignari ſolent, minuta autem per lineolas numeris ſuperimpoſitas. Ita ſi forte occurrant $35^{\circ}, 25' 36'' 42'''$, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 ſecunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua poſitio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipſam incidens facit angulos hinc & inde æquales, angulus hujuſmodi dicitur *rectus*. At ſi re-

cta una super alteram cadens duos angulos efficiat ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio ut eandem semper a se invicem servent distantiam, evidens est nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem, ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent seu angulum non efficient, tales lineæ dicuntur *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est duas lineas rectas in unico duntaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geometræ & ita exprimi solet: *Duæ lineæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt*. Itaque tres saltem lineæ requiruntur ut spatium undique claudatur; spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dicitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur *isosceles*. Demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur, *acutangulum*, si omnes habeat angulos acutos, & tandem *obtusangulum*, si angulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint; manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogrammum* appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo paral-

parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quadrilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur, & *Rhomboides* vocatur si latera opposita duntaxat æqualia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur; sed figura *polygona* dicitur quæ pluribus quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem &c., figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici solet. Figura autem polygona *regularis* est quæ æquilatera & æquiangula est.

VII. Axiomata & postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto & parte utilitas ut intelligamus dimidiam lineam tota minorem esse? Ecquis statim non videt rectam lineam produci posse, circulum dato intervallo posse describi & reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur simplicissimum quidem & in universa geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe *ea esse æqualia, quæ sibi mutuo superimposita perfecte congruunt.* Principium illud *superpositionis* non ita intelligendum est quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datæ longitudini applicat ut inde veram longitudinem concludat; talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est prædictum principium ut figuram alteri impositam imaginemur & deinde concludamus 1.° Ex partium datarum æqualitate, ipsam earundem partium convenientiam sive *coincidentiam* ..... 2.° Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam ac proinde & perfectam duarum figurarum æqualitatem & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio intelligenda non est duntaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus.

Unde

Unde evidens est idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Cæterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes quæ ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullo tamen spatio seu nulla figura terminatis.

PROP. I. RECTA QUÆLIBET IN RECTUM CADENS VEL DUOS ANGULOS EFFICIT RECTOS, VEL DUOBUS RECTIS ÆQUALES. Etenim recta insistat perpendiculariter ut GE, vel oblique ut RE (Fig. 1.) In 1.° casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC esse rectos. In casu altero, anguli duo CER, REF, simul sumpti, æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est, duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in O, simili ratione patet angulos FEO, OEC, duobus rectis æquales esse, ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Jam centro E describatur circulus, mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ, nempe 90°.

COR. II. Rectæ GH, RO in unam lineam coalescere non possunt, sed efficiunt angulos GER, HEO; qui dicuntur *ad verticem oppositi*. Illos autem angulos æquales esse manifestum est; cum sit dimidium peripheriæ RFO æquale dimidio peripheriæ GFH, sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO æquales inter se.

COR. III.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quælibet G, E, a punctis duobus quibùslibet, ut C, F, æqualiter distent, hoc est, si GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E, G, non magis inclinant versus C, quam versus F, ac proinde cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (ex def.), æqualis est rectæ totius GE, hinc & inde ad rectam CF, inclinatio, ideoque ob angulos utrinque æquales, recta GE, perpendicularis ad CF. Patet autem puncta C, F, sumi posse pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato, duci potest ad eandem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo Ec, Ef, describantur arcus circuli, sese invicem secantes in g; recta per g; & E ducta erit perpendicularis quæsita, ob distantias gc, gf & Ec, Ef æquales.

Si punctum h extra rectam datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur æqualia intervalla hc, hf; deinde ex punctis c & f, tanquam centris & eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg, hæc erit perpendicularis, ob æquales hc, hf, & gc, gf distantias. Evidens autem est in utroque casu unicam perpendicularem duci posse; unica enim est recta transiens per punctum E, vel h, quæ cum recta CF, æquales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem lineam perpendicularem esse omnium quæ ex puncto dato ad lineam datam duci possunt brevissimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte quam ex alia, ac proinde neque ad dexteram declinet neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est ex puncto dato ad lineam datam, unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas par-

partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c, f tanquam centris & eodem radio describantur arcus circuli sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis & sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in h, recta hg, dividet cf æqualiter in E, ut patet; cum singula puncta rectæ gh, æqualiter distent a punctis c, f, ac proinde Ec = Ef.

PROP. II. Si lineæ AB, DC, sint parallelæ (Fig. 2.), erit 1.° ANGULUS OFD QUI EXTERNUS DICITUR ÆQUALIS ANGULO OGB, QUI INTERNUS ET OPPOSITUS VOCATUR. 2.° ÆQUALES ERUNT ANGULI BGF, GFC, QUI DICUNTUR ALTERNI. 3.° ANGULI INTERNI ET AD EANDEM PARTEM POSITI DFG, FGB ÆQUALES ERUNT DUOBUS RECTIS. Cum lineæ parallelæ eodem inter se ubique distent intervallo (ex def.) statim patet eandem fore parallelæ utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO; ac proinde angulus OFD æqualis est angulo OGB, quod erat 1.um Præterea cum angulus GFC æquetur angulo DFO, ad verticem opposito (cor. 2. prop. 1.) erunt etiam æquales anguli BGF, GFC; quod erat 2.um Tandem cum anguli OFD, GFD, æquentur duobus rectis (prop. 1.) æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat 3.um

Viceversa si angulus OFD æqualis sit interno & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO, ac proinde rectæ illæ parallelæ sunt inter se. Rursus si æquales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul æquales sint interni ad eandem partem positi BGF, GFD, angulus externus DFO semper æqualis erit angulo interno & opposito BGF, ac proinde rectæ AB, CD erunt parallelæ. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones necessario nexu inter se conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat rectas illas esse parallelas. Porro in demon-

stran-

ſtrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK parallelæ ſint eidem rectæ CD, erunt etiam inter ſe parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit ac inclinatio rectæ CD ad eandem.

COR. II. Si per datum punctum O ducere oporteat rectam OK parallelam rectæ CD. Ducatur utcumque ex puncto O, recta OF; deinde ex puncto F tanquam centro deſcribatur arcus GD; atque ex puncto O, & æquali radio deſcribatur arcus æqualis FM. Tandem per duo puncta O, M, agatur recta OM, hæc erit parallela quæſita; ut patet; æquales enim ſunt anguli FOM, GFD, æqualibus arcubus ſubtenſi, ut oportet.

CAPUT II.

De linearum rectarum reſpectu circuli poſitione.

PROP. I. DUCTA RECTA FM, AD CIRCUMFERENTIAM UTRINQUE TERMINATA; QUÆ CHORDA DICITUR (Fig. 3.), RECTA EX CENTRO CIRCULI AD CHORDAM PERPENDICULARITER DUCTA, EANDEM SECAT IN DUAS PARTES ÆQUALES. Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E æqualiter diſtat a punctis extremis chordæ F, M, (ex defin.). Præterea cum recta EP ſit perpendicularis ad chordam, ſingula alia puncta æqualem habent ab iiſdem extremis diſtantiam (cor. 3. prop. 1.). Quare punctum P, æqualiter etiam diſtat a punctis F, M.

Et viceverſa recta quælibet EP, per centrum tranſiens & chordam æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter ſecat. Etenim cum recta EP chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter diſtat ab extremis F, M. Quia vero recta EP, tranſit etiam per centrum, punctum E æqualiter diſtat ab extremis F, M. Quare puncta P, E æqualiter diſtant a pun-

punctis F, M, ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F, M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta æqualiter etiam distant a punctis F, M. Erit ergo centrum E, hujus perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRUM DIVIDAT ÆQUALITER CHORDAM FM, ÆQUALITER QUOQUE DIVIDET ARCUM FHM. Etenim cum singula puncta rectæ EH, æqualiter distent a punctis F, M, æqualis erit puncti H, ab extremis F, M distantia. Quare si semicirculus GMH, semicirculo GFH, imponatur, congruet punctum M cum puncto F, & ob punctum H commune, congruent & chordæ HM, FH, & arcus iisdem chordis subtensi.

COR. I. In eodem circulo vel in circulis æqualibus, chordæ æquales æqualibus arcubus respondent, inæquales autem arcubus inæqualibus. Præterea chordæ æquales æqualiter distant a centro, chordæ autem inæquales distant inæqualiter; quod evidens est ex *superimpositionis* principio. Nam chorda æqualis cum æquali chorda semper congruet, nec cum chorda inæquali congruere unquam poterit.

COR. II. In eodem semicirculo vel in semicirculis æqualibus, quo majores sunt vel minores arcus, eo majores vel minores sunt chordæ & centro magis vel minus proximæ. Viceversa quo majores sunt vel minores chordæ, centro magis vel minus proximæ; eo etiam majores sunt vel minores arcus subtensi.

COR. III. Ducta chorda FM diametro AB parallela intercipit æquales arcus AF, BM. Etenim, cæteris manentibus ut ante, arcus AH = arcui BH, & arcus FH = arcui HM, quare demptis arcubus æqualibus remanet AF = BM. Evidens est eandem esse

esse demonstrationem si parallela NQ ad opposi as diametri partes jaceat, erit nempe arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N, Q coeant in G, chorda NQ abit in *tangentem* quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est in hoc etiam casu esse GN = GQ.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet qua ratione per tria data puncta circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ quæ jungant tria puncta data, hæ erunt chordæ circuli quæsiti. Quare ductis perpendicularibus, quæ chordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis transit per centrum, quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione dato circuli arcu centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur chorda arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur, eadem perpendicularis etiam angulum quem arcus metitur æqualiter in duas partes divide.

SCHOL. Ex hoc corollario patet facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32 & ita deinceps secundum terminos progressionis geometricæ duplæ; sed, per geometriam elementarem, angulus in tres partes æquales dividi non potest; atque hæc est anguli *trisectio* a geometris per *circinum* & *regulam*, ut dicunt, hoc est per lineæ rectæ & circuli constructionem, frustra quæsita. Demonstrant enim Geometræ problema illud ad tertii gradus æquationem necessario pertinere, quæ quidem æquationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eandem rationem per sola geometriæ elementa angulus divi-

dividi poteſt in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim diviſio, pro diverſo partium æqualium numero, ad altiores æquationum gradus aſſurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuiſſe volumus.

PROP. III. Radius EG in puncto contactus G ad tangentem perpendicularis est. Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. præc.), radius EG, minima eſt tangentis a centro diſtantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.).

Viceverſa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G, circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum ſit EG, minima rectæ RT a centro E diſtantia, alia quælibet puncta rectæ RT magis diſtant a centro quam punctum G, ergo ſingula puncta præter G, extra circumferentiam jacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit in unico puncto; cum ex centro E, ad rectam datam unica perpendicularis duci poſſit. (cor. 4. prop. 1 cap. 1.).

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto ſcilicet radio EG, erectaque in G perpendiculari RT.

COR. III. Quoniam ad punctum datum in circumferentia, unica tangens duci poteſt, ſi per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente vel circumferentiam ſecat.

COR. IV. Si duo circuli GNA, OGQ eandem habent tangentem, recta HG eidem perpendicularis per utriuſque centrum puta E, P tranſibit. Jamvero ſi ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta ſecabit in O circulum OGQ, & in R tangentem RT; erit ſemper in triangulo ESP latus PS, minus duobus reliquis ES, EP (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales ſint, erit recta PS, minor quam PG ſive PO. Ergo quodlibet punctum S cir-

circuli GSF, erit intra circulum OGQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem & circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit; nempe angulus contactus quem facit arcus cum tangente per infinitam circulorum seriem in minimas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxi Geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura, diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitæ lineæ nunquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva & tangente comprehensi, nullum dubium est quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse; cum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione quæ arbitraria omnino est semel constituta & explicata, jam nihil difficultatis superesse potest. Et requidem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa geometrarum consensio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro

Arith. F evi-

evidenti habebit angulum contactus & minorem esse quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROP. IV. ANGULUS BAD, TANGENTE BA ET CHORDA AD COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD. Etenim ducta diametro GE, chordæ AD parallela (Fig. 4.) ductaque alia diametro fF eidem chordæ perpendiculari, rectus erit angulus BAC tangente & radio comprehensus (prop. præced.), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD = BAC — DAC, vel — ACG, ob parallelas DA, EG. Quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG, erit angulus BAD = FAG — AG = FA = $\frac{1}{2}$ AD.

PROP. V. ANGULUS CAD (Fig. 5.) AD CIRCUMFERENTIAM HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM CD, LATERIBUS AC, AD INTERCEPTUM. Etenim ex anguli vertice A, ducatur tangens EB, summa trium angulorum BAC + CAD + DAE = 180° = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC, & angulus EAD = $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. præced.). Ergo angulus CAD = $\frac{1}{2}$ CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu CD, subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem majorem intercipit, uterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$ BD $\pm$ $\frac{1}{2}$ CE. Signum + valet pro angulo intra circulum, signum — pro angulo extra. Per E agatur chorda EF rectæ AD parallela, erit angulus BEF = BAD (ob paral-

parallelas). Sed menſura anguli BEF eſt $\frac{1}{2}$ BF, & $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ DF, & DF = CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ CE.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ab & ſecante AD interceptus = $\frac{1}{2}$ Db — $\frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in b, puncta E, B convenient in b. Simili ratione angulus dAb, inter duas tangentes Ad, Ab comprehenſus, pro menſura habet $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis quæ ſpatium claudunt, ſeu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. In triangulo quolibet summa trium angulorum æqualis est duobus rectis. Etenim per tres angulorum vertices deſcribatur circulus (cor. 2. prop. 2. cap. 2.) triangulum erit inſcriptum circulo, cujus chordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro menſura dimidium arcum lateribus oppoſitis ſubtenſum (prop. 5. cap. 2.). Quare trium angulorum ſumma æqualis eſt dimidiæ trium arcuum ſummæ. Hoc eſt, dimidiæ circumferentiæ ſeu gradibus 180.

COR. I. In triangulo unicus eſſe poteſt angulus rectus vel obtuſus, reliqui duo ſunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus eſt *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo datur & tertius qui eſt differentia inter datam duorum angulorum ſummam & gradus 180. Si autem unicus datus ſit angulus, data eſt reliquorum duorum ſumma, quæ eſt *complementum* ad duos rectos, & *ſupplementum* ſimpliciter appellari ſolet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) pro-

producto latere BC, angulus externus ABI æqualis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, & interni contigui ABC æqualis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.). Sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC æqualis etiam est duobus rectis. Ergo angulus externus ABI æqualis est duobus internis oppositis ACB, CAB; dempto scilicet communi angulo ABC.

PROP. II. In omni triangulo majus latus opponitur majori angulo, minus autem minori, et viceversa angulus major majori lateri et minor minori opponitur. Triangulum circulo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum subtendit major chorda & contra (cor. 2. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulo æquilatero singuli anguli æquales sunt inter se, & viceversa si tres anguli sunt æquales inter se, triangulum est æquilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria latera æqualia, fient tres æquales chordæ circuli quæ proinde tres arcus æquales subtendent; ideoque & tres anguli æquales sunt. Evidens autem est unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est æqualem grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi; & contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isoscele. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. Si in duobus triangulis tria latera æqualia sint, tota triangula erunt æqualia. Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.) Ex punctis A, B, tanquam centris describantur arcus FCG, DCE, se invicem secantes in C. Triangulum abc, ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum a; punctum b cadet etiam in B, ob AB = ab; & ob ac = AC, recta ac terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter

ob

ob bc = BC, recta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ ac, bc, se mutuo jungunt in c, utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo ac congruet cum AC, bc cum BC; totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus A = a, B = b, C = c & latus AB = ab, erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum a = A & b = B, cadet ac in AC, & bc in BC; quare latera duo ac, bc, & AC, BC in eodem puncto jungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo comparari inter se possunt latera duo ac, AC, quæ respondent angulis æqualibus; & hæc dicuntur *homologa*. Quare æqualia sunt triangula duo, si anguli unius æquales sint angulis alterius, & præterea si triangula latus unum homologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia & angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab & angulus A = a. Imponatur latus AB lateri ab, & latus AC lateri ac; ob angulos A, a æquales, latera illa congruent. Præterea cum sit AC = ac, & AB = ab, punctum c cadet in C, & b in B, ac proinde bc congruet cum BC.

PROP. IV. SI DUO TRIANGULA INÆQUALIA ÆQUALES HABEANT ANGULOS, PONATURQUE ANGULUS UNUS SUPRA ALTERUM ÆQUALEM ANGULUM, ITEMQUE SIBI MUTUO IMPONANTUR LATERA HOMOLOGA QUÆ ÆQUALEM IN UTROQUE TRIANGULO ANGULUM COMPREHENDUNT, ERIT TERTIUM LATUS TERTIO LATERI PARALLELUM. Ponatur angulus D (Fig. 10.) supra angulum æqualem B, latus DF supra latus homologum BC, & latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE vel fe parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB æqualis sit angu-

 lo

lo CAB, erit recta se rectæ AC parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus F poneretur supra angulum æqualem C, simili modo demonstratur rectam DE esse rectæ AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD, BC.

Viceversa si per punctum f, pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta se parallela rectæ AC; æquales sunt anguli Bfe, BCA; & Bef, BAC. (loc. cit.). Triangula illa quæ angulos habent respective æquales dicuntur *similia*.

PROP. V. QUODLIBET POLYGONUM RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGULA QUOT SUNT POLYGONI LATERA. Etenim ex puncto C intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est tot esse triangula quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygona (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, quot duci possunt, quæ tamen se mutuo non secent. Illæ autem rectæ quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur; patet in hoc casu tot esse triangula quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180° in numerum laterum, demptis duobus, hoc est demptis 360°. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum in quæ reductum est polygonum, demptis angulis quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360° (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt triangula quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180° in numerum laterum, binario mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180^\circ \times \overline{7-2} = 900$.

Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis

gulis angulorum ſumma angulis polygoni æqualis, ac proinde ſumma illa æqualis eſt producto ex 180° in numerum triangulorum, hoc eſt, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inſcribi poteſt. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, EC &c.; rectæ illæ ſe mutuo ſecabunt in C, & erunt inter ſe æquales. Etenim rectæ AC, BC ſibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ABC, itemque rectæ BC, DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa ſunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales ſint & bifariam æqualiter dividantur, æquales ſunt anguli CAB, CBA inter ſe, & angulis CBD, CDB; præterea æqualia ſunt latera AB, BD. Ergo iſoſcelia ſunt & æqualia triangula ACB, BCD, (cor. 2. prop. 3.). Quare AC = DC = BC; & propter latus commune BC, punctum interſectionis rectarum AC, BC, cadet in punctum C. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula iſoſcelia & æqualia, quot ſunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus ſit chorda arcus qui æqualis eſt quoto ex gradibus 360 per numerum laterum diviſis. Ita latus decagoni eſt chorda arcus grad. 36.

COR. IV. Latus hexagoni regularis circulo inſcripti æqualis eſt circuli radio. Nam ſi ex centro C, in ſex triangula dividatur hexagonum, æquilatera ſunt triangula illa ob radios CA, CB æquales & angulum ACB = 60°. Quare ſinguli anguli CAB, ABC ſunt etiam 60°, ac proinde CA = AB. pr. 3. Cor.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumſcribi poteſt, hoc eſt, intra polygonum regulare deſcribi poteſt circulus qui ſingula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inſcripti, totidem ſint chordæ æquales, chor-

 dæ

dæ illæ a centro æqualiter distant (cor. 1. prop. 2. cap. 2.). Quare si ex centro C, agantur perpendiculares CI, CK, hæ chordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop 3. cap. 2.).

COR. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quæratur polygoni centrum, quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur; invento polygoni centro, ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu iK, qui sit quoto æqualis, per extremitates K, i, ducatur radius CK agaturque recta indeterminata CB; ad punctum K erigatur perpendicularis DKB, occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD, erit DB, latus polygoni quæsiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio CB describatur circulus & per totam circumferentiam transferatur corda DB atque inscribatur polygonum DBAGFED, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales & æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsito.

Simili constructione circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quæsiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis, chorda hujus arcus erit latus polygoni; transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsitum.

Hic autem diligenter observandum est per Geometriam elementarem circulo inscribi posse duntaxat triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pen-

pentedecagonum, hoc eſt, figuram quindecim laterum, & polygona regularia in quibus numerus laterum ſe habet in progreſſione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona ut eptagonum, Enneagonum, endecagonum &c. deſcribi non poſſunt geometrice, niſi per conſtructionem æquationum quæ ad ſublimiorem gradum aſſurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inſcribi & circumſcribi poſſit, quo major eſt in polygono inſcripto vel circumſcripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum & circulum ſit data quavis differentia minor, jam circulus conſiderari poterit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compoſitum. Hæc circuli conſideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A, B, differentia ſit qualibet aſſignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitatum illarum differentia non eſt qualibet aſſignabili minor, quod eſt contra hyp. Quantitas autem, quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis *limes* appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhauſtionum*, ſeu *primarum* & *ultimarum* rationum. Hanc methodum quam fuſius explicabimus in prima parte phyſices, ubi ſermo erit de extenſionis diviſibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis ſatis eſt, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione seu de proportionibus.

PROP. I. In triangulis similibus acb, ACB, (Fig.13.) latera homologa sunt proportionalia. Ponatur ab pars dimidia rectæ AB, agaturque cg parallela rectæ AB, erit cg = bA. Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas æquales & ob latus commune bg, triangulum bcg æquale triangulo bgB, & latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. præc.). Ergo cg = bB = Ab. Præterea triangulum Ccg, æquale est triangulo cAb (loco cit.). Ergo Cc = Ac, & Cg = cb = gB. Quare Ac vel Cc, erit pars dimidia rectæ AC, sicut cb est pars dimidia rectæ CB.

lin. bc parall. CB

Si Ab sit tertia vel quarta aut quælibet alia pars rectæ AB (Fig. 14.) simili modo evidens est rectas Ac, cb, esse tertiam, quartam &c. partem rectarum, AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB, ducantur bc, fh &c. rectæ BC parallelæ, & eadem ratiocinatione patet triangula Acb, chg, hCi &c. æqualia esse triangulo acb.

Si recta Ab, accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio, simili ratione Ac bis cum dimidio continebitur in AC, & bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg æqualibus triangulo acb; inter parallelas hf& CB construi poterit triangulum Chi, cujus latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, cum sit fB pars dimidia rectæ Ab (per hypoth.) & recta hi æqualis rectæ fB, ob parallelas hf, CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB, hCi, rectas AB, hi, esse inter se *incommensurabiles*; divisa intelligatur recta hi, in partes 100, jam recta AB cer-

certum continebit partium numerum cum aliquo residuo, cum lineæ illæ ſint incommenſurabiles. Rurſus recta hi diviſa fingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, ſed cum reſiduo quod priori reſiduo minus eſt; atque ita deinceps minus perpetuo fiet reſiduum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, jam reſiduum fit nullum. Ergo generatim tri ngula quælibet ſimilia, latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA inter eaſdem parallelas, ut numerus quilibet alius partium in CB ad numerum partium in CA inter eaſdem parallelas. Etenim Ch : hc = Ci : im, & Ch : Ci = hc : im. Item hc : cA = im : mB, & hc : im = cA : mB. Ergo Ch : Ci = hc : im = cA : mB. Quare CB eſt ad CA ut numerus quilibet partium in CB ad eundem numerum partium in CA.

PROP. II. DUO TRIANGULA IN QUIBUS LATERA HOMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA, ÆQUIANGULA SUNT. Si (Fig. 10.) ponatur AC : BC = FE : FD, & AC : AB = FE : ED, æquiangula erunt triangula ABC, DEF. Nam ſi ſuper EF conſtruatur triangulum FEG triangulo ABC æquiangulum, facto ſcilicet angulo GEF = BAC, & angulo GFE = BCA, AC : BC = FE : FG : ſed (per Hyp.) AC : BC = FE : FD, ergo FE : FG = FE : FD, ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FEG ſimilia, erit AC : AB = FE : EG; ſed (ex hypoth.) AC : AB = FE : ED. Ergo FE : EG = FE : ED, ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED, FEG æquiangula ſunt & æqualia, ob latus commune FE, & latera FD, FG, & EG, ED æqualia (prop. 3. cap. præced.). Sed (per conſtr.) triangulum FEG triangulo ABC eſt æquiangulum, ergo triangulum FED ipſi quoque eſt æquiangulum.

COR. I.

COR. I. Si in triangulis ABC, DEF, sit angulus $D = B$ & præterea $DE : DF \neq BA : BC$, erit triangulum DEF triangulo ABC æquiangulum. Nam super AB capiatur $Be = DE$, ducaturque ef parallela rectæ AC, triangula ABC, eBf sunt æquiangula; cum ob parallelam ef, angulus $feB = A$, $efB = C$, & ob angulum B, communem. Ergo $Be : Bf = BA : BC$. Sed (ex hypoth.) $DE : DF = BA : BC$, ergo $Be : Bf = DE : DF$; at $Be = DE$, ergo $Bf = DF$; ac proinde duo triangula Bef, DEF, sunt æqualia & similia; sed Bef est triangulo ABC æquiangulum: ergo triangulum DEF est æquiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula duo, quæ duo latera homologa circa æqualem angulum habent proportionalia, sunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum BAC, bifariam & æqualiter dividat in triangulo BAC, eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD, DC lateribus AB, AC proportionales. Etenim producta recta CA, per punctum B agatur BE rectæ AD parallela, triangula BCE, DAC erunt similia (prop. 1.); ac proinde $BD : DC = AE : AC$; sed ob parallelas, angulus $BEA = DAC = DAB = ABE$; ergo triangulum BAE est isoscele (cor. 2. prop. 2. cap. præc.); quare $AE = AB$, ideoque $BD : DC = AB : AC$.

COR. III. Si ponatur triangulum BAC rectangulum, & ex angulo recto A demittatur perpendicularis AD in basim BC, quæ angulo recto imminet & *hypotenusa* dicitur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, & triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC, præter angulum rectum, habent quoque cum triangulo BAC angulum communem, ac proinde similia sunt inter se & toti triangulo. Hinc $BD : DA = DA : DC$, & $BD : BA = BA : BC$ ac tandem $DC : CA = CA : CB$.

COR. IV.

COR. IV. Cum sit $BD : BA = BA : BC$, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times CB$. Ergo $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

COR. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis sit hypotenusa trianguli rectanguli, cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica): Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, & contra.

COR. VI. Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO, OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL, triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde $CO : EO = EO : OL$; & $EO^2 = CO \times OL$; recta perpendicularis EO dici solet *ordinata*, *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem & circumferentiam comprehensa.

PROP. III. SI DUCANTUR IN CIRCULO CHORDÆ DUÆ BA, BC (Fig. 17.) SE MUTUO SECANTES IN E, CHORDARUM SEGMENTA ERUNT RECIPROCE PROPORTIONALIA. Si enim ducantur DA, CB, triangula BEC, DAE sunt similia ob angulos in E æquales, atque ob angulos C, A, & B, D iisdem arcubus subtensos. Quare $AE : DE = EC : BE$.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig. 18.) ex eodem puncto extra circulum ductæ, ad superficiem concavam terminentur, partes externæ EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales.

les. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt, ob angulum E communem & angulos B, C eodem arcu AD subtensos. Ergo EA : ED = EC : EB.

COR. II. Si recta EB sit secans, altera autem Ed tangens, erit EB : Ed = Ed : EA. Nam ductis dB, dA, similia erunt triangula EdB, EdA, ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE æquales quorum communis mensura est dimidius arcus Ad (cor. 3. prop. 4. cap. 2.). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : Ed = Ed : EA, hoc est, tangens est media proportionalis inter rectam totam EB & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione ut major pars sit media proportionalis inter totam rectam & ejusdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE, dimidiæ AB æqualis, & centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD describatur arcus DC, hic occurret rectæ AB in puncto quæsito. Etenim ob tangentem BA, erit BF : BA = BA : BD, ac proinde BF − BA : BA = BA − BD. BD. Sed BF − BA = BD = BC; cum sit FD = BA utpote dupla ipsius EA quæ est dimidia rectæ AB. Simili modo BA − BD = AC; ergo substitutione facta BC : BA = AC : BC, vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema quod his verbis proponere solent Geometræ: *Rectam dividere in media & extrema ratione*.

Alia etiam problemata proponi solent qualia sunt: *Tribus datis rectis quartam proportionalem invenire: Inter duas rectas invenire mediam proportionalem*. Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. Si duæ figuræ similes in triangula utcumque dividantur per diagonales ex angulis

GULIS HOMOLOGIS DUCTAS, TRIANGULA HOMOLOGA ERUNT SIMILIA. Etenim sint duo polygona ABCDE, FGHIK (fig.20.), in quibus angulus $A = F$, $B = G$, $C = H$, $D = I$, $E = K$, sitque præterea $AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF$; ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI, similia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B, G æquales sint & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, & ADE, IFK. Itaque angulus $BAC = GFH$, $DAE = FIK$. Ergo $BAE - BAC - DAE = CAD = GFK - GFH - IFK = HFI$. Igitur angulus $CAD =$ angulo HFI. Simili modo ostenditur angulos ACD, FHI, & ADC, FIH æquales esse. Quare triangula ACD, FHI sunt æquiangula.

Viceversa duæ figuræ quælibet similes sunt, si in triangula æquiangula resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangulis, æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ similes sunt.

COR. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione, ita ut sit $BC : GH = LC : MH$. Deinde si ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN, MO, quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant latera homologa ED, KI in eadem ratione, ita ut sit $ED : KI = DN : IO$, erit $LN : MO = CD : HI = BC : GH$ &c. Nam ductis NC, OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I æquales lateribus proportionalibus ND, DC, & OI, IH comprehensos. Quare $CD : HI = CN : HO$, & angulus $DCN = IHO$. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OHM, ac proinde triangula NCL, OHM similia sunt, ideoque $LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD, HI$ &c. Quare generatim si in duobus polygonis similibus

libus ducantur lineæ,quæ dividant latera homologa vel angulos homologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter se, atque etiam eorundem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem jam consideravimus in quantitatibus finitis, superest ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum quas *infinite magnas* & *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est nullam quantitatem in se spectatam, & sine nostro cogitandi modo, aut infinite parvam esse aut infinite magnam; sed magnitudo quælibet in se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine, utcumque parva, vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu & alia semper major in casu altero haberi potest; nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem quam duæ quantitates finitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem diversos esse infinitorum & infinitesimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima, semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limites augeri potest & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, & ita deinceps. Viceversa si quædam quantitas sit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*, & ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo cujus diameter

meter eſt ad chordam, ut eſt chorda ipſa ad abſciſſam, ac proinde ſi fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abſciſſa infiniteſima ordinis ſecundi.

Ex his patet calculo ſubjici poſſe quantitates infinitas & infiniteſimas. Infinitum hac nota exprimi ſolet ∞. Quare numerorum ſeries infinita hoc modo repræſentari poteſt, $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots \infty$. Pari modo quantitas quælibet finita concipi poteſt diviſa in partes perpetuo decreſcentes, donec perveniatur ad quantitatem infiniteſimam. Talis eſt ſeries, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. Evidens autem eſt quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione, vel ſubtractione majorem, vel minorem non fieri; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam, rationem habeat qualibet data minorem; ſimili ratione, quantitas infinite parva quantitatem finitam augere, vel minuere non poteſt. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo ſi diverſi infinitorum ordines per diverſos exponentes deſignantur, erit $\infty^2 + 2\infty = \infty^2$ & $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum ſi quantitates ejuſdem generis conſiderentur, ſive infinitæ, ſive infiniteſimæ, ex notione quantitatum illarum manifeſtum eſt eas non ſecus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum eſt quantitates illas non abſolute ſed relative duntaxat, & ſecundum noſtrum concipiendi modum, eſſe infinitas, vel infiniteſimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$, $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$, $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Ex his multa colligere eſt.

Quantitates infinitæ vel infiniteſimæ ejuſdem ordinis adduntur vel ſubtrahuntur non ſecus ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis multiplicata per quantitatem infinitam itidem ordinis pri-

mi producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cujus exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas cujus gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cujuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cujuscumque multiplicetur aut dividatur, in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum qui per exponentium summam exhibetur; in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repræsentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint de *primarum & ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.



APPEN-

APPENDIX

De proportionum usu in Triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

I. EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quæ est ars resolvendi triangula; in triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli & tria latera. Huc autem refertur trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, quæ tamen tres anguli esse non debent, partes reliquæ inveniantur; ac proinde tres partes datæ constituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quæsita. Verum quia latera trianguli simplicem rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli, angulis vel arcubus circuli substituuntur lineæ rectæ, quæ arcubus illis respondeant & trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB. (Fig. 21.) ex cujus vertice C, tanquam centro, & radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG. Producatur AC in a, erigaturque in C perpendicularis CH; evidens est angulum BCH vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB, vel arcus AB, angulus BCa vel arcus Ba dicitur *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB, & viceversa BA est *complementum* ipsius HB, & *supplementum* ipsius aB. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta, dicitur *sinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AE; recta autem CE, ejusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum & sinum com-

comprehensa dicitur sinus *versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*, CK *secans complementi*, & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur..... 1.° Sinus, cosinus, tangens, cotangens &c. anguli obtusi BCa, sunt etiam sinus, cosinus &c. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a, demitti non potest perpendicularis, quæ non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares BD, ad; similiter tangens alia esse non potest quam ae; sed ob triangula aCd, BCD, & Cae, CAE æqualia, habetur ad = BD, ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus aB, atque etiam arcus AB, evidens est BI esse cosinum arcus aB & HK illius cotangentem ..... 2.° Sinus BD arcus AB est dimidium chordæ BG, arcum duplum BAG subtendentis. (Prop.2. cap. 2.)... 3.° Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° usque ad 90°, & eodem modo decrescunt a 90° usque ad 180° ..... 4.° Sinus arcus 30° dimidio radio æqualis est; est enim radius æqualis chordæ arcus 60° (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) & ejusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30° est dimidia hypotenusa hujus trianguli. Nam si ACB = 30°, erit BG = BC, & BD = $\frac{1}{2}$ BG. 5.° Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° usque ad 90°, ita ut tangens arcus grad. 90, sit infinita; nam radius CH, in angulo recto HCA, non potest concurrere cum tangente.... 6.° Tangens arcus 45° æqualis est radio; nam si angulus ACB sit 45°, triangulum

gulum rectangulum CAE erit isosceles, & AE = AC .... 7.° Sinus versus AD arcus qui minor est 90°, æqualis est differentiæ inter radium CA & cosinum CD = BI. Præterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH & sinum CI = BD; at sinus versus supplementi nempe Da, æqualis est summæ radii & cosinus .... 8.° Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD vel BI = AE : BD, nempe radius est ad cosinum ut tangens ad sinum. Deinde hæc alia habetur analogia CH : CI vel BD = HK : IB, hoc est, radius ad sinum ut cotangens ad cosinum. Tandem AE : CA = CH vel CA : HK; hoc est, tangens ad radium ut radius ad cotangentem ... 9.° Ex præcedentibus analogiis derivantur formulæ quarum ope sinus substituuntur tangentibus & viceversa. Sit R = 1, erit Sin. = Cos. $\times$ Tang. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}$, Cos. = Sin. $\times$ Cot. $= \frac{\text{Sin}}{\text{Tang.}}$, Tang. $= \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cot.}}$; Cot. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$, Cot. A $\times$ Tang. A = 1 = Cot. B $\times$ Tang. B .... 10.° In omni triangulo sinus angulorum sunt ut latera angulis opposita. Etenim triangulum circulo inscribatur, singula latera sunt chordæ arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi; sed semisses sunt inter se ut tota, ergo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum. Hinc cum sinus anguli recti sit radius & latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum.... 11.° In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum ut latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo, tangens anguli unius acuti est

ad radium ut latus huic angulo acuto oppositum, est ad latus alterum. 12.° In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc semper habetur analogia: majus latus AC est ad summam duorum aliorum laterum $AB + BC$ ut eorumdem laterum differentia $AB - BC$ ad differentiam segmentorum AE, CE, quæ fiunt ducta ex angulo majori B in majus latus AC perpendiculari BE; nam si ex anguli vertice B, tanquam centro & radio qui sit minori lateri æqualis BC, describatur circulus GCD, producto latere AB in G, erit $AG = AB + BC$, & $AP = AB - BC$, atque ob $CE = ED$ erit $EA - CE = AD$.... 13.° Dato sinu & cosinu arcus, invenitur sinus & cosinus arcus dimidii, atque etiam arcus dupli. Sit AM (Fig. 23.) arcus datus cujus sinus MP & cosinus CP, dati sint; ducta chorda AM, & ad eam demissa perpendiculari CQN, erit AQ vel MQ sinus, & CQ cosinus dimidii arcus; præterea agatur chorda MB, quæ erit CQ dupla ob triangula ACQ, ABM similia atque ob AB duplam ipsius AC. Sed $AP : AM = AM : AB$; quare $AM^2 = AB \times AP$, & $AM = \sqrt{AB \times AP}$, ideoque MQ sinus dimidii arcus $= \frac{1}{2} \sqrt{AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times AP}$. Simili modo cum sit $AB : BM = BM : BP$, erit $BM^2 = AB \times BP$, & $BM = \sqrt{AB \times BP}$, ergo CQ vel cosinus dimidii arcus $= \frac{1}{2} \sqrt{AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times BP}$.

Jam vero si invenire oporteat sinum & cosinum arcus dupli, sit AN arcus simplex, cujus sinus AQ vel MQ, & cosinus CQ, erit MP sinus & CP cosinus arcus dupli. Sed ob triangula rectangula AQC, AMP similia, erit $CA : CQ = AM : MP$. Quare si radius dicatur R, & arcus AN dicatur A, erit $R : \text{cos}. A = 2. \text{Sin}. A : \text{Sin}. 2A$. Tandem ob eorumdem triangulorum similitudinem, erit $CA : AQ = AM : AP$, vel $R : \text{Sin}. A = 2. \text{Sin}. A : R - \text{cos}. 2A$, ideoque

RR

$RR - R \times$ cos. $2A = 2.$ Sin. $A \times$ Sin. A, ac proinde cos. $2A = \frac{RR - 2.\text{Sin. } A \times \text{Sin. } A}{R}$ ... 14.° Datis sinu & cosinu duorum arcuum, inveniuntur sinus & cosinus eorumdem summæ, vel eorum differentiæ. Sint arcus AM, DN, quorum sinus & cosinus dati. Agatur chorda FD ad radium CM perpendicularis, & ex punctis D, F demittantur perpendiculares DQ, FP ad radium CA, quarum linearum una erit sinus summæ, altera autem sinus differentiæ arcuum AM, DM, ideoque recta CQ erit cosinus summæ, & CP cosinus differentiæ. Jam vero ducantur rectæ GK, FL, perpendiculares ad DQ, itemque rectæ MN, GI, perpendiculares ad radium CA, fiatque arcus $AM = A$, & arcus DM vel $FM = B$. His positis patet sinum DQ summæ arcuum esse $= QK + DK = GI + DK$, & sinuum FP differentiæ eorumdem arcuum esse $= GI - KL = GI - DK$, cum sit $DK = KL$; quare inveniendæ sunt duæ illæ rectæ. Sed ob triangula CMN, CGI similia, erit $CM : CG = MN : GI$, vel $R :$ cos. $B =$ Sin. $A : GI = \frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B}{R}$.
Item ob triangula CMN, DGK similia, erit $CM : CN = DG : DK$ vel $R :$ cos. $A =$ Sin. $B : DK = \frac{\text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R}$, factaque summa, erit DQ, vel Sin. $(A + B) = \frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B + \text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R}$.
factaque subtractione, erit $GI - DK$ vel $FP =$ Sin. $(A - B) = \frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B - \text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R}$.
Simili modo (Fig. 24.) invenietur cosinus CQ summæ & cosinus CP differentiæ arcuum; inveniantur

nempe rectæ CI & GK = PI, subtrahanturque ex CI, vel huic addantur. Jam vero ob triangula CMN, CGI similia, erit CM : CG = CN : CI, vel R : cos. B = cos. A : CI = $\frac{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}{\text{R}}$. Itemque ob triangula DGK, CMN similia, erit CM : MN = DG : GK, vel R : Sin. A = Sin. B : GK = $\frac{\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{\text{R}}$; ideoque CQ, vel Cosinus (A + B) = $\frac{\text{Cos. A} \times \text{Cos. B} - \text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{\text{R}}$, & CP vel cos. (A - B) = $\frac{\text{Cos. A} \times \text{Cos. B} + \text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{\text{R}}$ ... 15.° Cum sit DQ + FP = 2GI, & GI = $\frac{\text{Sin. A} \times \text{Cos. B}}{\text{R}}$, evidens fit esse DQ = $\frac{2.\,\text{Cos. B} \times \text{Sin. A}}{\text{R}}$ — FP, ideoque FP = $\frac{2.\,\text{Cos. B} \times \text{Sin. A}}{\text{R}}$ — DQ. Simili modo cum sit DQ — FP = 2DK = 2KL, & præterea DK vel KL = $\frac{\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{\text{R}}$, erit DQ = $\frac{2.\,\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{\text{R}}$ + FP, ac proinde FP = DQ — $\frac{2.\,\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{\text{R}}$. Tandem cum rectæ CQ, CI, CP se mutuo excedant eadem quantitate IQ vel GK, erit CQ + CP = 2CI; sed CI (ex dem.) = $\frac{\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{\text{R}}$. Ergo CQ + CP = $\frac{2.\,\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{\text{R}}$ ac proinde CQ = $\frac{2.\,\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{\text{R}}$ — CP, ideoque CP =

2. Cos.

$\frac{2.\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{R} - CQ$. Quare $CP - CQ = 2IQ = 2GK$. Sed $GK = \frac{\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R}$ ergo $CP = \frac{2.\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R} + CQ$. Simili modo $CQ = CP - \frac{2.\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R}$ .... 16.° Sint tres arcus circuli in progreſſione arithmetica, & dati ſint ſinus & coſinus unius arcus extremi atque etiam arcus medii; præterea dati ſint ſinus & coſinus differentiæ communis, habebitur ſinus arcus alterius extremi, multiplicando duplum coſinum differentiæ communis per ſinum arcus medii, & ex producto per radium diviſo dematur ſinus alterutrius arcus extremi, reſiduum erit ſinus extremi alterius. Eſt enim $DQ = \frac{2.\text{Cos. B} \times \text{Sin. A}}{R} - FP$ vel $FP = \frac{2.\text{Cos.B} \times \text{Sin.A}}{R} - DQ$...... 17.° Iiſdem poſitis conditionibus, ſi multiplicetur coſinus arcus medii per duplum ſinum differentiæ communis, habebitur ſinus arcus majoris, ſi huic producto per radium diviſo addatur ſinns arcus minoris; ſi autem ex eodem producto dematur ſinus arcus majoris, reſiduum erit ſinus arcus minoris; cum ſit $DQ = \frac{2\,\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{R} + FP$, & $FP = DQ - \frac{2.\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{R}$... 18.° Poſitis ut ante arcubus AF, AM, AD, in progreſſione arithmetica, ſi multiplicetur duplus coſinus arcus medii per coſinum differentiæ communis, habebitur coſinus arcus unius extremi, demendo ex hoc producto per radium diviſo coſinum extremi alterius

rius..... 19.° Cæteris manentibus ut ante, multiplicetur duplus ſinus arcus medii per ſinum differentiæ communis, huic producto addatur coſinus arcus majoris, habebitur coſinus arcus minoris; ſi vero idem productum ſemper diviſum per radium, dematur ex coſinu arcus minoris, habebitur coſinus arcus majoris. Eſt enim $CP = \frac{2.\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R}$

$$+ CQ \ \& \ CQ = CP - \frac{2.\text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R}.$$

SCHOL. Ex hactenus demonſtratis facile conſtruuntur ſinuum tabulæ. Dato enim ſinu & coſinu anguli, inveniuntur ſinus & coſinus angulorum omnium qui decreſcunt vel creſcunt in ratione dupla. Dato ſinu graduum 30, inveniri poſſunt ſinus graduum 15, deinde $7\frac{1}{2}$, poſtea $3\frac{1}{4}$ & ita deinceps ſinuum ſemiſſes, progrediendo uſque ad 12ᵃᵐ operationem, nempe uſque ad 52″ 44‴ 3⁗ $\frac{1}{4}$, qui quidem ſinus ſine errore ſenſibili cum arcu confunditur. Quia vero ſinus illi minimi ſunt arcubus proportionales, dici poterit: Ut arcus ille eſt ad ſuum ſinum, ita arcus 1′ eſt itidem ad ſuum ſinum. Dato autem ſinu arcus 1′, invenientur ſinus arcuum 2′, 3′, 4′ & ita deinceps uſque ad 30°; tandem a 30°, uſque ad 60° & a 60° uſque ad 90° progredi licebit. In exemplum adhibetur arcus 30° cujus ſinus dimidio radio æqualis eſt, atque hinc ſtatim colligitur & ex quadrato hypotenuſæ laterum quadratis æquali, coſinum eſſe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, hoc eſt dimidio radio per $\sqrt{3}$ multiplicato, poſito radio $= 1$.

Neque difficilius erit angulorum calculum ad tangentes revocare; cum (ex dem.) ſinus & coſinus per tangentes & cotangentes exprimi poſſint. Hæc pauca ſatis ſunt ad intelligendam vulgarium tabularum conſtructionem; in iis nempe tabulis angulorum ſinus & tangentes repræſentantur, quarum quidem com-

commoditas est maxima, præsertim si logarithmos adjunctos habeant quorum facilis usus patet ex logarithmorum doctrina antea explicata.

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum superficierum proprietatibus.

PROP. I. TRIA PUNCTA QUÆ IN EADEM RECTA NON JACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT. Id patet ex definitione ipsius plani. Et quidem per tria puncta duci potest planum, quod evidens est; illud vero planum unicum esse manifestum est; ponamus enim planum aliud quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipso deflectat, jam eadem linea recta quæ primum planum tangeret, alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum brevissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta unicum planum duci potest, ac proinde constans est ac determinata positio plani per data tria puncta transeuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes, sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum, tria sunt puncta in directum non posita, quæ proinde determinant positionem plani in quo jacent duo utriusque lineæ puncta, ac proinde & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus duas rectas se mutuo secare, patet in hoc

casu

casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum, quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea recta. Nam duorum planorum intersectio est linea cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jaceant in directum. Cum enim tria puncta, quæ non sunt in eadem recta, positionem plani determinent, si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possent, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta.

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus rectam illam ad planum perpendicularem non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis, jam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum, ac proinde non jaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR. V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, & contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur, duæ illæ lineæ ad planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, erunt quoque perpendiculares vel æqualiter inclinatæ ad eandem lineam jungentem; est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ, & viceversa.

PROP. II. DUO PLANA SIBI MUTUO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES QUAS IN RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMUS. Ponamus planum aliquod A immobile in quo jaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt poly-

polygona rectilinea ; hæc duo plana utpote omni crassitie destituta in unum coalescunt planum. At sit planum B, quod revolvi intelligatur circa latus aliquod plano A fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1.° ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam, circa quam planum B revolvitur, quæ proinde est utriusque plani intersectio... 2.° planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tandiu convertatur, donec ad oppositam plani A partem perveniat.... 3.° planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum pervenerit situm in quo non magis pendeat ex una parte quam ex alia...... 4.° Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum intersectione. Quia vero centrum in ipso circuli plano jacet, necessum est hujus arcus centrum esse in linea recta cujus revolutione generatur ipsum arcus planum.... 5.° Si concipiatur linea quædam sublimis, cui perpendiculariter affixa sit recta alia, hæc recta planum describet, interea dum linea sublimis circa seipsam convertitur in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ sibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo descripta plana non foret ; sed ex una parte convexa & ex altera concava, ut patet. Quare ex ipsa plani formatione evidens est revolutione rectæ planum describi non posse, nisi recta revolvens sit ad lineam in qua revolvitur perpendicularis.... 6.° Centrum arcus in quo sumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, positum est in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum intersectionem ducta. Quare si describatur semicirculus cujus centrum sit in linea duobus planis communi, & cujus planum sit ad planum immotum perpendiculare, per hujus semicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad se invicem inclinata
easdem

easdem habent proprietates, quæ in mutua linearum inclinatione demonstrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit vel duobus rectis æquales (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum intersectione æquales sunt anguli ad verticem oppositi. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eandem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360.° (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (Cor. 4. Prop. 1. cap. 1.)

COR. V. Distantia puncti alicujus a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelæ. Si enim non sint parallelæ, sibi occurrere possunt, ac proinde & plana ipsa in quibus hæ lineæ jacent, ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

CAPUT II.

De Superficierum mensura.

PROP. I. SUPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGULI ÆQUALIS EST PRODUCTO EX BASI IN ALTITUDINEM. Sit parallelogrammum rectangulum ABCD (Fig. 25.) cujus altitudo AD certum contineat pedum numerum E. G. 7, basis autem AB octo contineat; divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies ut DM, quæ singulæ continent

tinent

tinent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati qui in prima superficie continentur toties sumantur quot sunt æquales superficies ut DM, ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum; atque eadem valet demonstratio etiamsi altitudo & basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia, quorum proinde superficies utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulum CAB (Fig. 26.) non rectangulum, ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB dimidium rectanguli DABE, quare ut ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet etiamsi perpendicularis EB trianguli, CED, cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, seu $CEB - DEB = \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{CB - DB}{2} \times AD = \frac{1}{2} CD \times AD$; ac proinde trianguli cujuslibet superficies æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula æqualia, quæ ipsam habent parallelogrammi basim eandemque altitudinem, pa-

tet

tet generatim superficiem parallelogrammi cujuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas & super eadem vel æquali basi constituta, sunt æqualia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta & super eadem basi sunt parallelogrammorum dimidia ac proinde etiam inter se æqualia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis quod alio modo jam demonstravimus; nempe *quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo, æquale esse quadratis laterum*. Hanc vero geometriæ foecunditatem totiusque doctrinæ geometricæ conjunctionem, variis exemplis tyronibus sæpe ostendere debet peritus magister.

COR. IV. Cum triangula sint ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium & altitudinum; ac proinde, si bases fuerint æquales, triangula erunt inter se ut altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt inter se ut bases.

COR. V. Si altitudo trianguli unius sit ad trianguli alterius altitudinem ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt æqualia. In hoc enim casu habetur proportio in qua productum extremorum æquale est producto mediorum, hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim æquale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt æqualia: & viceversa si triangula sunt æqualia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

COR. VI. In triangulis similibus superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim cum triangula sint in ratione composita basium & altitu-

titudinum, atque (ex hyp.) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo & contra: Quare triangula similia sunt ut quadrata laterum homologorum.

PROP. II. SUPERFICIES POLYGONI REGULARIS ÆQUALIS EST DIMIDIO PRODUCTO EX PERPENDICULARI PER CENTRUM POLYGONI AD LATUS UNUM DEMISSA, IN POLYGONI CIRCUMFERENTIAM. Etenim triangula omnia, in quæ resolvitur polygonum regulare, sunt æqualia (Prop. 5. cap. 3.) ideoque eandem habent altitudinem CI (Fig. 11.). Sed superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ &c. Quare cum $AB + BD + DE$ &c. sit tota polygoni peripheria, patet superficiem totam polygoni æqualem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

COR. I. Superficies circuli æqualis est dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis & arcu comprehensa *Sector* dicitur; evidens autem est hujus sectoris superficiem æqualem esse dimidio producto ex arcu in radium.

PROP. III. FIGURARUM SIMILIUM SUPERFICIES SUNT IN RATIONE DUPLICATA LATERUM HOMOLOGORUM. Etenim triangula homologa in quæ reducuntur figuræ similes, sunt earumdem figurarum partes similes (Prop. 4. cap. 4.), ac proinde triangula homologa erunt ut polygona tota; sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum; ergo in eadem etiam ratione sunt figuræ similes quælibet.

COR. I. Superficies circulorum sunt ut quadrata radiorum vel diametrorum.

SCHOL. Ex propositionibus præcedentibus nota quidem est ratio quam habent variæ circulorum peripheriæ atque etiam illorum superficies ad suos radios; at ratio accurata inter circuli circumferentiam illiusque dia-

diametrum nondum definiri potuit, ita ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturæ* nomen adhiberi solet eo quod *quadratum* sit cujuslibet superficiei communis mensura, ut jam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt Geometrarum conatus ut ad illam quadraturam proxime & quantum voluerint accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant Geometræ ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quatuor partes æquales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea divisionum puncta tangentes & chordas respective ductas, habebuntur polygona duo quorum unum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*; quæ quidem ambo constant triangulis æqualibus. Porro, per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases quæ in primo casu sunt circulorum chordæ, in altero autem tangentes, ac proinde omnium quoque chordarum & tangentium summa innotescet, hoc est perimeter polygoni inscripti, quæ circuli circumferentia proxime minor est, & polygoni circumscripti perimeter quæ proxime major est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22 ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsita est & statuitur ut 1 ad 3, 14159265 &c. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quæ quidem *approximatio* est fere infinita; sed omnium vulgatissima & elegantissima ratio diametri ad peripheriam ea est quam exprimunt numeri

meri 113, & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 est ad 355 ut diameter data ad peripheriam quæsitam; hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli quam audacter se invenisse non raro jactitant viri geometriæ imperiti, qui ipsum quidem quæstionis statum ut plurimum non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas; aliquando per geometriam subliniorem figuræ curvilineæ area accurate haberi potest, sed commodissima & generalis est praxis qua figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes & *physice* rectilineas dividitur & deinde figuræ totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tanquam contrarium iis quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant Geometræ; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet *a* pro communi basium & altitudinum mensura, & sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*; atque H exprimat quoties altitudo ejusdem parallelogrammi eandem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens quoties mensura *a*, contineatur in basi alterius parallelogrammi *b*, autem exponat quoties altitudo parallelogrammi ejusdem contineat mensuram *a*, parallelogrammorum illorum su-

perficies erunt inter se ut productum ex duobus numeris B, H, ad productum ex numeris duobus b, h; hæc est genuina hujus operationis notio; quare dum dicitur parallelogrammi superficiem æqualem esse producto ex basi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet, sed mera proportio. Hæc eadem observatio ad physicam sæpe transferri debet, ubi de spatii velocitatis & temporis mensura sermo est.

SECTIO III.

De Geometria Solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum genesi & proprietatibus.

PROP. I. Solidorum rectilineorum genesim explicare. Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE (Fig. 27.) motu sibi semper parallelo feratur; solidum AGROFE inde genitum *prisma* dicitur; & *rectum* vocatur, si AE describenti plano recta fuerit, sin minus, *obliquum*. Si planum describens fuerit parallelogrammum, solidum inde genitum dicitur *parallelopipedum*. Si autem planum describens sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur. Basis solidi seu planum describens potest esse polygonum quodlibet, & solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineæ æquales & parallelæ terminantes rectilineam solidi faciem. At si rectæ lineæ in apicem coeunt, solidum *pyramis* dicitur (Fig. 28.)

COR. I. Prisma igitur opposita latera AGR, EFO, æqualia habet, similia & parallela; cum AGR fluendo per AE, motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Præterea dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA, ac pro-

proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallelopipedum sex parallelogrammis terminatur; cubus autem sex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duæ oppositæ parallelo basis motu descriptæ. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide si omnia latera basis sunt æqualia inter se & latera rectilinea ipsius pyramidis pariter inter se æqualia, erunt omnes facies triangula isoscelia æqualia.

COR. IV. Quævis sectio prismatis vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelæ singula latera sunt singulis lateribus basis parallela, cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli anguli homologi erunt æquales (Prop. 2. cap. præc.) ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismate sectio basi parallela, ipsi basi æqualis est; in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora in ratione distantiæ sectionis a vertice ad distantiam basis ab eodem. In prismate patet æqualitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa æqualia sunt lateribus basis, ideoque sectio prorsus æqualis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam, in unaquaque facie habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter se atque etiam omnes pyramides inter se comparatæ, si super basibus æqualibus & inter eadem plana parallela constituantur, spatia solida respective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcumque planis, quæ sint basibus parallela; sectiones unius prismatis vel pyramidis æquales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes erunt æ-

quales eidem basi ; in pyramide erunt ipsi basi similes ; & singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiæ basis a vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet : cum pyramides terminentur plano, basium & sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt tanquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulæ cum singulis æquales sint, erunt & ipsa solida æqualia.

COR. VII. Pyramides basium æqualium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum ; pyramides semper erunt super æqualibus basibus & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem, erunt inter se, ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori æquales, concipi poterit pyramis major tanquam composita ex diversis pyramidibus quæ basim habeant basi minori æqualem ; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales, ergo pyramis major est ad minorem ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se ut bases.

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram ; dividi fingantur bases in partes huic mensuræ communi æquales, jam pyramides duæ tot alias continebunt pyramides æquales quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam ut bases.

Tandem si pyramidum bases forent incommensurabi-

rabiles, adhibeatur aliqua mensura, quæ minuatur in infinitum donec fiat utriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine, eodem modo patet in hoc etiam casu pyramides esse inter se ut bases.

PROP. II. Solidorum curvilineorum genesim explicare. Si recta sublimis motu sibi semper parallelo circuli circumferentiam radat; figura solida hoc motu genita *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum & sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum hoc motu genitum *conus* vocatur. Utriusque figuræ *basis* vocatur circulus cujus circumferentiam recta percurrit. Patet cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum ipsumque coni verticem *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus vel conus *rectus* solidum genitum appellatur; secus autem *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quævis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29. refert cylindrum rectum, figura autem 30 conum rectum repræsentat. Si semicirculus AHB (Fig. 31.), circa immotam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphæra* dicitur.

COR. I. Si basis prismatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, & imminuta magnitudine in infinitum, habeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma cujus latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero in qua basis latera sunt æqualia & distantiæ a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphæra plano quovis secetur, sectio erit circulus qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, ac deinde erit

major vel minor prout planum sectionis magis vel minus recedet a centro sphæræ. Sit enim sectio FIH, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis AB, quæ plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C, patet rectas EI fore radios sphæræ. Si autem cadat extra, in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune & basis CI = CF; quare quodvis latus EI = EF ac proinde in utroque casu sectio erit circulus cujus centrum E; illud vero centrum in primo casu coincidet cum centro sphæræ. Patet autem ob angulum rectum in E, radium circuli EF, semper minorem fore radio sphæræ CF, nisi radii illi congruant abeunte E in C. Evidens etiam est eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo major fuerit distantia CE.

COR. III. Sphæra considerari potest tanquam composita ex pyramidulis æqualibus numero infinitis & infinite parvis quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum.

SCHOL. In capite præcedenti ubi prismata & pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei; at linea non ex punctis, sed ex lineis, superficies ex areolis non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum & solidorum notionem tyronibus proponunt nonnulli magistri qui lineas tanquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repræsentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex sectionum æqualitate prismatum & pyramidum æqualitatem concludimus, id non debet intelligi quasi prismata & pyramides ex sectionibus pla-

planis componi velimus; nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duæ infinite proximæ, quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa forent æqualia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit solamque sectionum æqualitatem considerare; id vero facere nunquam licet nisi præter sectionum æqualitatem, æquales etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiæ. Porro evidens est hanc methodum ad *exhaustionum* methodum sæpius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPUT II.

De Solidorum mensura.

PROP. I. PRISMATIS CUJUS LATERA RECTILINEA SUNT BASI PERPENDICULARIA SUPERFICIEM METIRI. Singulæ prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta: ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies sumatur. Quia vero parallelopipedum sex terminatur superficiebus quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales, inveniantur tres inæquales superficies illarumque summa bis sumatur, habebitur tota parallelopipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari possit tan-

tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compositum, cylindrus haberi poterit tanquam prisma *infinitilaterum* cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem & producto addatur dupla basis sive circuli superficies.

PROP. II. Pyramidis cujus latera omnia sunt æqualia, et basis latera sunt etiam æqualia, superficiem invenire. Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia æqualia, erit omnium triangulorum summa æqualis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis demissum ad latus quodlibet basis; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Hæc autem singula perpendicula sunt æqualia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera* ac proinde coni recti superficies æqualis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo truncata ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis versus basim abeunt in trapezia æqualia; hæc autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo æqualia quorum bases sunt sectionis & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum angulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis & sectionis in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum

rum summa in coni truncati longitudinem sive latus. Res autem aliter obtinetur, si inveniatur circulus DE (Fig. 30.), cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B, G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh, erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf: Df = Dh : Gh, ac proinde ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh; quare eadem est differentia inter diametros BC, DE, quæ est inter diametros DE, GM; illa nempe differentia est dupla rectæ Df vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arithmetica inter BC, GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, GM. Sed circuli utpote figuræ similes suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap. 3.). Ergo circumferentia circuli diametro DE descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQLM (Fig. 32.) circumscriptus sphæræ, habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphæræ maximum, superficies segmenti sphæræ HAF, æqualis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur particula quævis Ff circuli *genitoris* ita parva ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff usque ad AB in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, & Ff superficiem coni truncati cujus mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum quarum radii sunt EF, ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum,

rum, erit coni truncati superficies ut recta Ff ducta in circumferentiam cujus radius est OP. Jam vero ob triangula rectangula similia Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn : Ff = GE : GF = GP : GO = PO : CO vel EN; ob EN = BL = CO; ideoque Nn × EN = fF × PO, ac proinde cum peripheriæ sint ut radii, erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam æquale producto ex fF, in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF, æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeunte REN in MBL, tota sphæræ superficies totius cylindri superficiei æqualis est, demtis basibus,

COR. V. Superficies sphæræ æqualis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, sive diametrum sphæræ, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo major est (cor. 1. prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphæræ superficiem ut 3 ad 2. Nam superficies sphæræ, in hoc casu, basi cylindri quadruplo major est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies major est.

PROP. III. Prismatis soliditatem metiri. Polygonum quod prismatis basis est in ipsam prismatis altitudinem ducatur, habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis sive polygoni superficies per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis per ipsum quadrati latus. Parallelopipedi soliditas invenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis, circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione

tione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, evidens est cubum esse communem solidorum mensuram non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulæ pedi sive 12 pollicibus æquantur, & ita dicendum de alia qualibet mensura.

PROP. IV. PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.), cujus basis sit cubi facies quadrata, evidens est totam cubi soliditatem dividi in sex hujusmodi pyramides quadrilateras, æque altas & æqualium basium, ac proinde æquales. Igitur pyramis quælibet erit sexta pars cubi; sed cubi mensura æqualis est producto ex basi in altitudinem, ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel quod idem est in tertiam partem altitudinis IP. Ergo hujusmodi pyramidis soliditas æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu quod idem est, æquatur tertiæ parti cubi ejusdem basis & ejusdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quælibet est tertia pars prismatis eandem cum ipsa pyramide basim habentis eandemque altitudinem. Etenim sit pyramis quælibet, fingaturque cubus cujus altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Jam si ex centro cubi alia exeat pyramis cujus basis sit facies quadrata cubi, evidens est hanc pyramidem habere eandem cum proposita pyramide altitudinem ac proinde pyramides illæ sunt inter se ut bases (Cor. 8. Prop. 1. cap. præc.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixæ, æqualis est producto ex tertia parte altitudinis in basim, ergo ob altitudinem eandem in utraque pyramide, erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim. Id vero facilius repræsentari potest hoc modo. Sit pyramis

mis quæsita P, cujus altitudo a, basis B, pyramis autem basi cubi imposita dicatur p, erit $P : p = B : b$; sed $p = \frac{1}{3}$ ab, ergo $P : \frac{1}{3} ab = B : b$, ideoque $P = \frac{1}{3}$ aB. Porro hæc pyramis ponitur quadrilatera; facile autem divisa intelligitur in pyramides duas triangulares æqualis basis ejusdem altitudinis, ac proinde pyramis quælibet triangularis æquatur tertiæ parti prismatis triangularis, quod eandem habeat basim eandemque altitudinem. Generatim vero cum pyramis quælibet polygona itemque prisma polygonum dividi possint in pyramides triangulares & prismata triangularia ejusdem basis atque ejusdem altitudinis, patet pyramidem quamlibet polygonam esse tertiam partem prismatis polygoni ejusdem basis atque ejusdem altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tanquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera considerari possint, erit conus tertia pars cylindri eandem habentis basim & eandem altitudinem.

COR. II. Cum sphæra haberi possit tanquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphæræ, bases autem omnes simul sumptæ totam occupant sphæræ superficiem, singulæ illæ pyramides æquales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa æqualis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficiæ sphæræ in tertiam partem radii. Ergo tota sphæræ soliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphæræ æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. SOLIDA DUO SIMILIA, SUNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERUM HOMOLOGORUM. **Ex solidorum definitione & ex præcedentibus propositionibus evidens est corporis cujuslibet soliditatem es-**

se

ſe ſemper ut productum ex aliqua ſuperficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; ſuperficies autem ex duabus dimenſionibus componitur, ergo ſolidum quodlibet eſt in ratione compoſita trium dimenſionum homologarum, ſeu ejuſdem nominis; ſed ſolida *ſimilia* ea dicuntur, quæ ſingulas dimenſiones homologas habent proportionales; ergo ſolida ſimilia ſunt in ratione compoſita ex tribus dimenſionibus proportionalibus, ac proinde in ratione triplicata unius cujuslibet dimenſionis homologæ.

COR. I. Sphæræ ſunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim ſphærarum ſoliditates ſunt inter ſe ut circuli maximi ſuperficies in radium ducta (Cor. 2. prop. præc.). Sed circulorum ſuperficies ſunt in ratione duplicata ſemidiametrorum (Cor. 1. prop. 3. Sect. præc.); ergo ſphæræ ſunt in ratione triplicata ſemidiametrorum vel diametrorum. Idem facile patet ex ſphærarum ſimilitudine, cum enim ſphærarum ſoliditates per circuli maximi ſuperficiem determinentur, ſintque circuli figuræ ſimiles, evidens eſt ſphæras eſſe ſolida ſimilia ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi ſunt ſolida ſimilia, itemque ſimiles ſunt cylindri ſphæris circumſcripti (Cor. 3. Prop. præc.). Ergo cubi ſunt in ratione triplicata laterum, & cylindri ſunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Priſmata omnia, ſi inter ſe comparentur, ac pyramides omnes inter ſe, erunt ut producta ex baſibus & altitudinibus; quare ſi baſes fuerint æquales, erunt ſolida ut ſolæ altitudines; ſi autem altitudines fuerint æquales, erunt ut ſolæ baſes. Si ea ſolida fuerint æqualia, altitudines erunt baſibus reciproce proportionales; & viceverſa, ſi baſes fuerint altitudinibus reciproce proportionales, ſolida erunt æqualia. Tandem ſi baſes fuerint ſimiles, & altitudines lateribus baſium homologis proportionales, ſolida erunt in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum.

SCHOL.

SCHOL. De ſolidorum rectorum ſuperficiebus in capite præcedenti ſermonem habuimus; verum ſi ſolida fuerint obliqua, ſuperficierum menſura ſubliniorem geometriam aliquando poſtulat. Quod ſpectat ſolida ſuperficiebus planis terminata, res eſt nullius difficultatis; cum enim ſolidorum illorum facies ſint polygona rectilinea, ad triangulorum ſuperficiem reduci ſemper poterit illorum menſura. Priſmatis cujuſvis exemplo rem illuſtrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo priſmatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia priſmatis latera utpote parallela perpendiculariter quoque ſecabit, atque ſectio erit polygonum cujus unumquodque latus ad duo parallela priſmatis latera erit perpendiculare. Quare ſuperficies uniuſcujuſque faciei æquabitur producto ex unoquoque ſectionis latere in priſmatis latus quodlibet, ob laterum omnium æqualitatem, ac proinde priſmatis ſuperficies æquatur producto ex omnibus lateribus ſectionis, hoc eſt, ex tota ſectionis perimetro in priſmatis latus quodlibet. Jam ſi priſma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum baſi, ideoque ſuperficies priſmatis æqualis eſt producto ex perimetro baſis in altitudinem, ut ante; quod idem valet in ſuperficie cylindri qui poteſt conſiderari tanquam priſma infinitilaterum. At ſi rectus non fuit cylindrus, planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, ſectione ſua cum cylindro obliquo generabit curvam quæ *ellipſis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda, pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui ſuperficies æqualis producto ex ellipſis circumferentia in latus cylindri. Quod ſpectat coni obliqui ſuperficiem reduci non poſſe patet, ut fit in cono recto; cum in cono obliquo æquales non ſint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in baſis circumferentiam. Sed hæc pauca monuiſſe ſatis ſit; neque enim pertinent ad Geometriæ elementa.

AP-

APPENDIX

De lineis curvis.

I. Lineæ curvæ notionem ita simplicem esse jam observavimus ut explicatione ulla vix clarior effici possit; quare prætermissa definitione, de lineis curvis generatim & deinde de parabola & ellipsi pauca exponemus, alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

In curva qualibet (Fig. 34.) recta AD lineas parallelas, ut MM, æqualiter dividens *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. Punctum A in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelæ MM dicuntur *ordinatæ*. Pars diametri vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehensa dicitur *abscissa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica, quæ relationem inter semiordinatas & abscissas exprimit. Ita demonstratum est in circulo (Fig. 16.) quadratum rectæ EO, æquales esse producto ex CO in OL. Jam diameter CL dicatur a, sitque CO $= x$, & OE $= y$. Erit OL $= a - x$, ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum. Ex his evidens est ordinatas & abscissas curvæ esse quantitates indeterminatas; hæ autem determinantur, sumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita si in æquatione ad circulum ponatur $a = 10$, fiatque successive $x = 0, 1, 2, 3, 4$ &c. invenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{21}$ &c. quare si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, & per singulas perpendicularium extremitates ducatur curva, hæc ad quæsitam curvam eo accuratius accedet quo plures erunt hujusmodi perpendiculares. Ordinatæ non so-

lum ad axem, ſed ad quamlibet diametrum referri poſſunt, atque etiam initium abſciſſarum non a ſolo diametri aut axis vertice computari poteſt, ſed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abſciſſæ computari poſſunt vel ab ipſo diametri vertice, vel etiam a centro, atque ita prodeunt diverſæ ejuſdem curvæ æquationes. Verum quocumque modo curva conſideretur, probe diſtingui debent rectæ ad dextram vel ad ſiniſtram jacentes, & ideo dicuntur *poſitivæ* vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet poſitivas vel negativas; at ubi appellatio determinata eſt, hæc ſemper retineri debet; quare ſemiordinatæ & abſciſſæ poſſunt eſſe vel negativæ vel poſitivæ; ratio autem facile patet ex iis quæ de quantitatibus poſitivis & negativis in algebra obſervavimus.

II. Curva quælibet conſiderari poteſt vel tanquam curva *polygona*, vel tanquam curva *accurata*. Primus conſiderandi modus nihil aliud ſignificat niſi curvam tanquam polygonum infinitilaterum conſiderari; vel tanquam polygoni inſcripti & circumſcripti *limitem*. Unum autem probe obſervandum eſt in curvarum conſideratione; ſi nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet ne eandem curvam velut accuratam habeat, & viceverſa; atque etiam eadem regula tenenda eſt in duarum curvarum conſideratione, ambæ ſcilicet vel tanquam polygonæ, vel tanquam accuratæ conſiderari debent; inde enim in rebus phyſicis orti ſunt errores aliqui. Rem exemplo demonſtrabimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35.) ducantur chordæ æquales & infiniteſimæ PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD. Præterea agantur per puncta O, E recta OQ, & per punctum D, tangens DN, rectæ OQ occurrens in N, erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE eſt iſoſcele & angulus ODN = angulo NDE ac proinde NO = NE, & OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod deſcribere arcum circuli infi-

infinitesimum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quæ in loco D corpus a linea recta retrahat. Si consideretur circulus tanquam polygonum, chorda infinitesima PD, erit *spatiolum* tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis & in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D agentis parallela, erit hæc lineola OE, vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tanquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repræsentatur per OE, & in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioqui effectus duplo major æstimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus duntaxat comparamus, res perinde se habet, quæcumque adhibeatur curvarum consideratio, eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem quæ modo explicavimus referuntur ad virium centralium doctrinam in physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana considerari solet tanquam motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita; hic non agimus de curvis quarum puncta singula in eodem non sunt plano, & ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est curvam quamlibet ad lineas duas in plano positione datas, ordinatas nempe & abscissas referendam esse; ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia secundum certam eandemque legem ad rectas positione datas referri, ita ut punctum illud secundum eandem omnino legem in quolibet infinite-

ſimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eandem ſed plures curvas deſcriberet (contra hyp.). Ex hac curvarum conſideratione aliqua ſane utiliſſima colliguntur. 1.° Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim rectam in duobus tribuſve punctis contiguis curvam tangere, jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat ..... 2.° Si deſcriptus intelligatur circulus qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuſcumque circuli minoris eandem habentis tangentem arcus aliquis utrinque circa punctum contactus ſit intra curvam, cujuſcumque vero circuli majoris arcus ſit extra curvam, hunc circulum dicimus curvæ *oſculatorem* in dato puncto, & ipſius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem eſt ex geometriæ elementis circuli oſculatoris centrum poſitum eſſe in concurſu duarum perpendicularium ad eandem curvam, ubi puncta duo curvæ ad ſe invicem in infinitum accedunt; hæc enim eſt circuli proprietas ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ ſint ipſi peripheriæ perpendiculares; talis autem recta e centro circuli oſculatoris ad curvam ducta vocatur *radius oſculator* .... 3.° Quamvis inter tangentem & arcum circuli tranſire poſſint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ & arcum circuli oſculatoris nullus alius circulus tranſire poteſt; nam (ex def.) quicumque minor circulus, eſt intra curvam, quicumque major eſt extra ipſam. Tota circulorum oſculatorum utilitas eo reducitur ut omnium curvarum arcus infiniteſimus conſiderari poſſit tanquam circularis. Etenim arcus infiniteſimus circuli oſculatoris & arcus infiniteſimus curvæ eaſdem habent proprietates, cum radius ſit ad circulum oſculatorem & ad arcum infiniteſimum curvæ perpendicularis .... 4.° Hinc definiri poteſt curvarum in quolibet puncto curvatura; ſatis enim erit diverſas circu-

lorum

lorum osculatorum curvaturas inter se comparare: quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam tantum: manifestum est semicircumferentiam duplo minus curvam esse quam circumferentiam integram; & duplo major est radius circuli ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo vel triplo majorem incurvetur, & ita deinceps. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ; inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli qui curvam in dato puncto tangens, cum ipsa curva ita congruat ut inter curvam & circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem cum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius quam circulus osculator ad curvam accedat, concludendum est circulum cum ipsa curva in hoc puncto eandem habere curvaturam. Ex his patet finitam esse curvæ alicujus curvaturam, si finitus sit radius osculator; at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius osculator $= 0$, curvatura est infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam quæ de methodo *exhaustionum* & de *primis* ac *ultimis rationibus* jam explicata sunt. Hæc pauca quorum usus in physicis institutionibus recurret ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest ut parabolæ & ellipseos naturam breviter exponamus.

IV. Si in axe AD (Fig. 34.) sumantur abscissæ quotlibet & ad singula puncta erigantur semiordina-

tæ. ea lege ut abſciſſæ ſemper ſint ut quadrata ordinatarum, curva per ſingulas ordinatarum extremitates tranſiens dicitur *parabola*. Jam abſciſſa dicatur x, & ordinata y, erit ſemper x, ut y^2, ac proinde ratio ordinatarum ad abſciſſas conſtans & eadem manet; quare ſi p ſit quantitas conſtans, erit $\frac{y^2}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quæ eſt æquatio ad parabolam; nempe in omni parabola quadratum ordinatæ æquale eſt producto ex abſciſſa in quantitatem conſtantem; hæc autem quantitas conſtans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abſcindatur recta AF quæ ſit quartæ parametri parti æqualis, punctum F, parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam creſcente abſciſſa, creſcit etiam quadratum ordinatæ, evidens eſt parabolam non eſſe curvam in ſe redeuntem, ſed puncta illius ſingula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR. II. Data abſciſſa qualibet ejuſque ordinata, inveniri ſemper poterit parameter, cum ſit tertia proportionalis ad ordinatam & abſciſſam.

COR. III. Si abſciſſa ponatur $= 0$, fit quoque ordinata perpendicularis $MM = 0$, ac proinde puncta M, M, coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare ſi per verticem parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens parabolæ in puncto A.

COR. IV. Ducta intelligatur ſecans per punctum N, quæ parabolæ occurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp, ad quam ex puncto N erigatur perpendicularis Nq, axi parallela, ſit $PT = s$, $PN = y$, Nq vel $Pp = f$ erit $tq = \frac{fy}{s}$, ob triangulorum TNP, Nqt ſimilitudinem, ac proinde $pt = y + \frac{fy}{s}$ & $Ap = x + f$. Jam ſumatur æquatio ad curvam in puncto t, erit $pt^2 = Ap \times p = y^2$

$y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = px + pf$, deletiſque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$, & dividendo per f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$. Jam puncta N, ı ad ſe invicem accedant in infinitum mutuoque coeant, ſecans abit in tangentem, fitque Nı vel $Pp = 0$; quare $f = 0$ & $\frac{fy^2}{s^2} = 0$, ac proinde æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, ſeu ob $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in parabola recta PT, quæ *ſubtangens* dicitur dupla eſt abſciſſæ AP.

COR. V. Recta FN ducta ex foco parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet, æqualis eſt abſciſſæ AP & quartæ parti parametri. Nam cum ſit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata jacet ſupra vel infra punctum F, erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ & $FN = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS æqualis eſt angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum FTN eſt iſoſcele, ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS æqualis eſt angulo FNT. Hæc eſt tangentis proprietas, quæ in phyſicis inſtitutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Recta quælibet MX (Fig. 36.) ducta ex puncto quolibet parabolæ, & axi AQ parallela diameter parabolæ appellatur. Jam vero agatur ordinata MP ad axem, & ex punctis m, O ducantur parallelæ mp, OQ. Tandem ex puncto m agatur mS axi

axi parallela. Dicatur AP, x; PM, y; Qp, f; AQ, k; erit $Ap = k - f$, & ob triangulorum TPM, mSO similitudinem, erit $TP : PM = mS : SO$, hoc est, $2x : y = f : SO = \frac{fy}{2x}$; ideoque $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{fy}{2x}$. Præterea, ex natura parabolæ $pm^2 : PM^2 = Ap : AP$, ideoque $\left(y - \frac{fy}{2x}\right)^2 : yy = k - f : x$, vel $yy - \frac{fyy}{x} + \frac{ffyy}{4xx} : yy = k - f : x$, ductisque mediis & extremis, erit $xyy - fyy + \frac{ffyy}{4x} = kyy - fyy$, & dividendo per yy, factaque reductione erit $x + \frac{ff}{4x} = k$, vel $\frac{ff}{4x} = k - x$.

Jam vero abscissa ad diametrum MO, dicatur x, & ordinata mO, dicatur y', erit $MO = PQ = AQ - AP - k = x$, ideoque $x' = k - x$, ac proinde $\frac{ff}{4x} = x'$, vel $ff = 4xx'$. Sed ob triangulum mSO rectangulum, erit $mS^2 + SO^2 = mO^2$, hoc est, $ff + \frac{ffyy}{4xx} = y'y'$, & loco ff substituendo illius valorem $4xx'$, itemque loco yy illius valorem px, habebitur reductione facta $4xx' + px' = y'y'$ vel $(4x + p)\, x' = y'y'$. Est autem $4x + p$ quantitas ad arbitrium sumpta, seu constans, quæ si ducatur p', erit $p'x' = y'y'$. Æquatio altera ad parabolam respectu diametri cujuscumque; quare quadratum ordinatæ ad diametrum, æquale est producto ex abscissa in quantitatem constantem quæ diametri *parameter* dicitur; & generatim quadrata ordinatarum ad diametrum sunt inter se ut ejusdem diametri abscissæ respective.

VI. Si in axe HI (Fig.37.) sumantur abscissæ quotlibet, & ad singula puncta erigantur ordinatæ FN, PM ea lege, ut sit semper FM^2 ad PN^2 in ratione $HF \times$

FI

FI ad HP $\times$ PI, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellipsis* quæ in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint æqualia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major HI $= a$, ducaturque ex puncto axis medio C recta BCD, quæ dicitur axis minor, sitque BC $= b$, HP $= x$, PM $= y$, PI $= a - x$, erit $\overline{a-x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$, quæ est æquatio ad ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$, æquatio ad circulum. Si abscissæ computentur a centro C, sit CP $= x$, PM $= y$, fiatque HI $= 2a$, erit in hoc casu, $aa - xx : y^2 = aa : bb$, & $y^2 = \frac{aabb - bbxx}{a}$. Si ex minoris axis extremitate B, tanquam centro, & intervallo BF $=$ CH, tanquam radio describatur arcus circuli, axi majori occurrens in punctis F, f, puncta illa vocantur ellipseos *foci*; evidens autem est hæc puncta a centro ellipseos æqualiter distare; nam ob BC axi perpendicularem, triangula CBF, CBf sunt æqualia.

COR. I. Cum duo ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt ellipseos axes, duæ etiam sunt parametri; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, & contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissæ computentur a centro, sit $2a$ axis major & $2b$ axis minor, erit $2ap = 4b^2$; his autem valoribus in utraque æquatione ad ellipsim substitutis, æquatio ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habebitur $y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II.

COR. II. Ex ellipſeos æquatione evidens eſt eam curvam in ſe redeuntem & undique terminatam eſſe; creſcentibus enim abſciſſis a centro computatis decreſcunt ordinatæ, ac tandem omnino evaneſcunt, ſi abſciſſa ſemiaxi æqualis ſumatur. Manifeſtum etiam eſt mutua axium in centro C interſectione, ellipſim in quatuor partes ſimiles & æquales dividi, cum eadem ſit ad quamlibet partem curvæ æquatio omneſque proprietates perinde ſe habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decreſcente, puncta N, n coeunt in H, patet tangentem in H eſſe axi perpendicularem.

COR. III. Diſtantia focorum a centro facile invenitur; nam cum ſit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare diſtantia foci a centro eſt media proportionalis inter ſemiaxium ſummam illorumque differentiam. Præterea ob triangulum CBF rectangulum, erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, ſeu $HF : BC = BC : FI$, nempe ſemiaxis minor eſt medius proportionalis inter foci unius diſtantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex ellipſeos conſtructione ſumma rectarum BF, Bf æqualis eſt axi majori; at ponamus eandem manere ſummam in quolibet puncto, ſitque $RF + Rf = HI$. Dicatur $HC = a$, $BC = b$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = a + x$, HF vel If $= a - c$, Hf vel $IF = a + c$. Jam vero cum ſit (per hypoth.) $FR + fR = 2a$, ſi differentia inter FR & fR dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, & $FR = a + z$. Jam ob triangula FRS, fRS, rectangula, erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc eſt $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Præterea $FS^2 + SR^2 = FR^2$, hoc eſt $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergo æquationes duæ quarum prima a ſecunda ſubtrahatur,

hatur, fiet $4cx = 4az$ & $z = \frac{cx}{a}$; quo valore subſtituto in prima æquatione loco z, ideoque & $\frac{c^2x^2}{a^2}$, loco z^2, erit $c^2 - 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, factaque, ut moris eſt, reductione habebitur $a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$, & $a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2$, factaque diviſione per $a^2 - c^2$, habetur $\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 ſubſtituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, & tandem $= \frac{a^2b - b^2a^2}{a^2}$; quæ eſt æquatio ad ellipſim ante inventa. Hæc ergo eſt ellipſeos proprietas ut ductis ex utroque foco rectis ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum ſumma ſit axi majori ſemper æqualis. Hanc eandem proprietatem ex æquatione ellipſeos derivari facile eſt; verum ex proprietate ipſa æquationem elicere placuit ut exemplum eſſet tyronibus, qua ratione ad æquationem curvæ ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens eſt datis duobus ellipſeos axibus, ellipſim facili manu deſcribi poſſe; ſumptis nempe in axe majori duobus punctis tanquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua ut filum perpetuo tenſum maneat, acus motu ſuo ellipſis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili & axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R in ellipſeos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectæ FR, fR & in linea producta FR, ſumatur $RT = Rf$, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E & per punctum R agatur ER, hæc erit tangens in R. Etenim ponamus rectam ER, ellipſi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto, in recta RE, agantur lineæ

neæ rT, rf, rF. Quoniam (per conſtr.) TR = Rf & fE = ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde ſingula puncta rectæ ERr æqualiter diſtant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT major eſt quam FT, ergo etiam Fr + rf major eſt quam FT, ideoque etiam major quam HI; cum (per conſtr.) ſit FT = HI; quare punctum r non pertinet ad ellipſim; ergo recta RE tangit ellipſim in unico puncto R. Hæc eſt utiliſſima in phyſicis inſtitutionibus tangentis proprietas, quam quidem ex ellipſeos æquatione, non ſecus ac in parabola fecimus, eruere licebat; ſed diverſas veritatis inveniendæ vias tyronibus demonſtrare maxime convenit.

SCHOL. *Sectiones conicæ* appellantur parabola & ellipſis, quibus etiam annumerari debet *hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpote nullius fere uſus in noſtris phyſicis inſtitutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit ſi tres illas curvas in coni ſectione conſideremus.

Sit ABC conus (Fig. 37. 38.) circulari baſi inſiſtens, & ſecetur plano quolibet iEM. Ponatur ſectio alia KiL parallela baſi & occurrens priori ſectioni in Hi, intelligaturque ſectio tertia priores duas in EH, KL perpendiculariter biſecans atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH donec ipſi AK occurrat in D, ductiſque EF ac DG rectæ KL parallelis & occurrentibus ſectioni triangulari in F, G. Dicatur EF = a, DG = b, ED = c, EH = x, & Hi = y; ob triangulorum EHL, EDG ſimilitudinem, erit ED (c): DG (b) = EH (x): HL = $\frac{bx}{c}$. Simili modo ob triangulorum DEF, DHK ſimilitudinem erit DE(c): EF(a) = DH (c−x) (Fig.37) vel (c + x) (Fig.38.): HK = $\frac{ac + ax}{c}$. Tandem cum ſectio KiL parallela baſi ſit circulus, ut patet

tet ex genesi ipsius coni, erit HK $\times$ HL $= \overline{Hi}^2$, hoc est, $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = y^2$. At si ponatur sectionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela, tunc erit HK$=$EF $=$ a, ideoque HK$\times$HL $= \overline{Hi}^2$, hoc est, $\frac{abx}{c} = y^2$. Probe notanda est curvarum illarum genesis. Sectio conica est ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculares duobus coni lateribus occurrat. At sectio conica dicitur *hyperbola*, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera, sed in hoc casu sectio ita se habet ut planum secans productum, cono ad verticem opposito occurrat in D (Fig. 38.), alteraque sectione generet curvam, quæ *hyperbola opposita* vocatur. Igitur in æquatione ad hyperbolam, punctum D sumitur in hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est DH $\times$ EH. Quoad tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$, patet eam esse ad parabolam cujus parameter $\frac{ab}{c}$. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natæ sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen.

FINIS.

Tab. I. Geom.







ab II Geom.

